



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲

ریاضیات عمومی

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱ : توابع برداری

فصل ۲: توابع چند متغیره

فصل ۳: انتگرال ۲ گانه

فصل ۴: انتگرال ۳ گانه

فصل ۵: انتگرال روی خم

فصل ۶: انتگرال روی سطح



این فایل بصورت **نمونه ای از جزوه اصلی** ارسال شده است.
برای سفارش فایل اصلی به آدرس اینترنتی EbiMath.com مراجعه فرمایید.

ممنون که با رعایت قانون کپی رایت ما را یاری میکنید.

مولف : ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

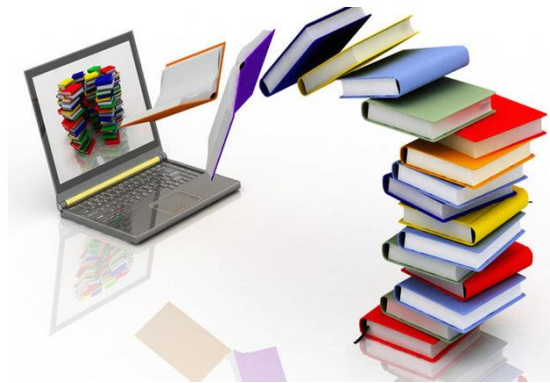
آیدی تلگرام : t.me/EShahebrahimi

ایمیل: shahebrahimie@gmail.com

برای دریافت نمونه سوالات بیشتر به همراه پاسخ تشریحی

به آدرس اینترنتی زیر مراجع کنید :

EbiMath.com



محصولات آموزشی مبحثی ریاضی عمومی ۱:

لینک خرید فیلم مبحثی " حد "

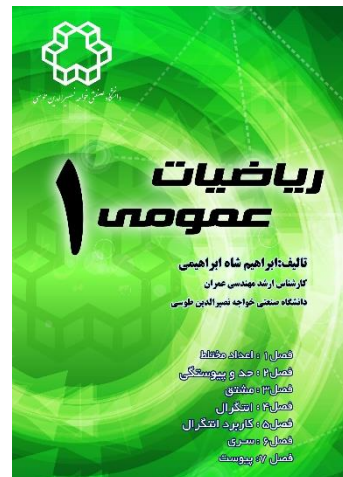
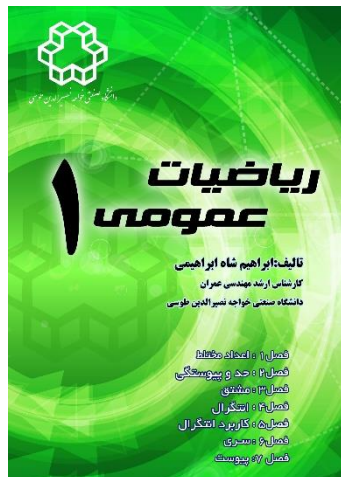
لینک خرید فیلم مبحثی " مشتق "

لینک خرید فیلم مبحثی " اعداد مختلط "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال "

لینک خرید فیلم مبحثی " کاربرد انتگرال "

لینک خرید فیلم مبحثی " سری "



محصولات آموزشی مبحثی ریاضی عمومی ۲:

لینک خرید فیلم مبحثی " توابع برداری و رویه ها "

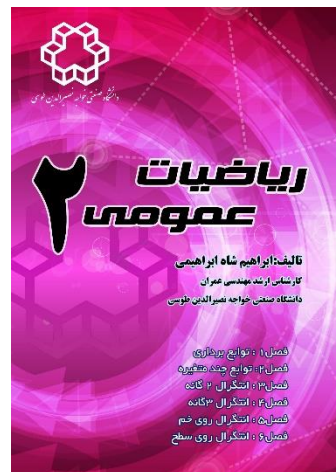
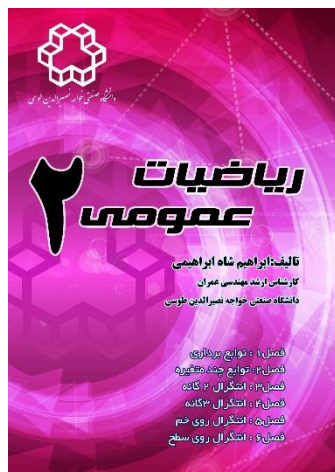
لینک خرید فیلم مبحثی " توابع چندمتغیره "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال دوگانه "

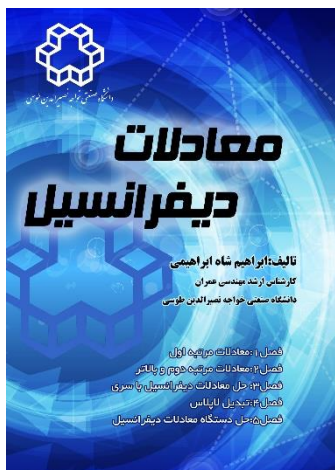
لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال سه گانه "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال روی خم "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال روی سطح "



محصولات آموزشی مبحثی معادلات دیفرانسیل :



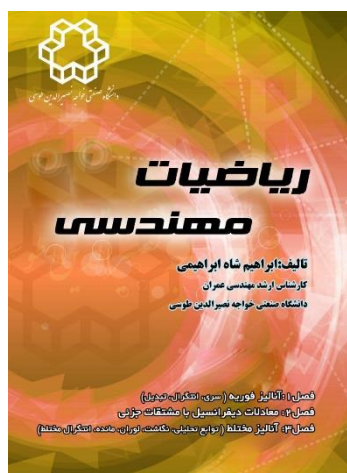
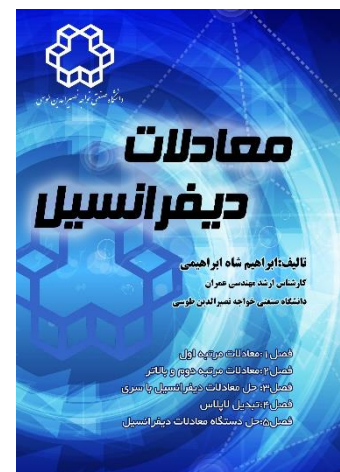
لینک خرید فیلم مبحثی "معادلات مرتبه اول"

لینک خرید فیلم مبحثی "معادلات مرتبه دوم و بالاتر"

لینک خرید فیلم مبحثی "سری"

لینک خرید فیلم مبحثی "لاپلاس"

لینک خرید فیلم مبحثی "حل دستگاه"

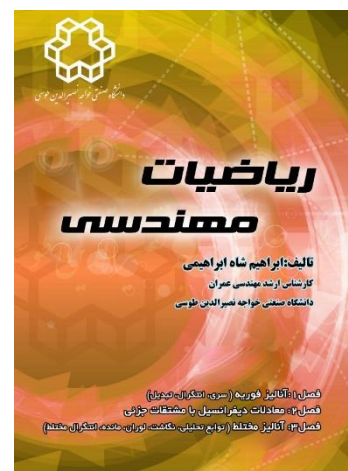


محصولات آموزشی مبحثی ریاضیات مهندسی :

لینک خرید فیلم مبحثی "آنالیز فوریه"

لینک خرید فیلم مبحثی "معادلات PDE"

لینک خرید فیلم مبحثی "آنالیز مختلط"



پک کامل محصولات آموزشی:

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی "ریاضی عمومی ۱"

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی "ریاضی عمومی ۲"

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی "معادلات دیفرانسیل"

آکادمی کوپری با همکاری انجمن علمی مهندسی صنایع خواجه نصیرالدین طوسی و انجمن های علمی بزرگ کشور برگزار می کند.

کارگاه جمع بندی معادلات دیفرانسیل

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیره انجمن دیفرانسیل

زمان: جمعه ۲۰ خرداد از ساعت ۱۰ به مدت ۴ ساعت

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

آکادمی کوپری با همکاری انجمن های علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و انجمن های علمی بزرگ عمران کشور برگزار می کند.

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیره انجمن دیفرانسیل

زمان: جمعه ۳۰ مهر

قسمت اول ساعت ۱۲-۱۳ و قسمت دوم ساعت ۱۶-۱۷

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

آکادمی کوپری با همکاری انجمن علمی مهندسی عمران، انجمن علمی مهندسی صنایع و انجمن خواجه نصیرالدین طوسی و انجمن های علمی بزرگ کشور برگزار می کند.

کارگاه جمع بندی ریاضی ۲

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیره انجمن دیفرانسیل

زمان: پنجشنبه ۱۹ خرداد از ساعت ۱۰ به مدت ۴ ساعت

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

انجمن علمی دانشکده مهندسی مکانیک برگزار می کند:

کارگاه آموزش انتگرال

ویژه ورودی های ۹۸

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

زمان: پنجشنبه ۲۵ مهر ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

آکادمی کوپری با همکاری انجمن علمی عمران دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی و شهید بهشتی برگزار می کند.

مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

سر فصل ها:

- کاربرد مشتق (میدان شده)
- انتگرال
- کاربرد انتگرال
- سری ها

شرکت در این کارگاه به تمامی دانشجویان ترم اول سراسر کشور توصیه می شود.

برای ثبت نام و کسب اطلاعات بیشتر به سایت زیر مراجعه کنید.

ROOYADESTAN.IR

انجمن علمی دانشکده مهندسی مکانیک برگزار می کند:

کلاس جمع بندی ریاضی ۱

ویژگی آمادگی در امتحان میانترم

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

زمان: پنجشنبه ۲۳ آبان ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

کارگاه جمع بندی میانترم ریاضی مهندسی

آبازیر فوری و حل معادلات با مشتقات جزئی (PDE)

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیره انجمن دیفرانسیل

زمان: جمعه ۲۷ آبان ساعت ۱۰ تا ۱۳

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

کارگاه جمع بندی آتلاین آزمون میان ترم ریاضی ۱

سر فصل ها: حد و پیوستگی | مشتق و کاربرد | اعداد مختلط | توابع متعالی

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیره انجمن دیفرانسیل

زمان: پنجشنبه ۲۶ آبان ساعت ۱۰ تا ۱۴

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

کارگاه کوپری با همکاری انجمن های علمی دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی برگزار می کند:

صفر تا صد انتگرال در یک روز

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیره انجمن دیفرانسیل

زمان: پنجشنبه ۱۰ آذر ساعت ۱۰ تا ۱۴

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

تضمین کیفیت فیلم های آموزشی:

اگر از هر محصولی رضایت نداشتید، کل هزینه عودت داده خواهد شد.

سخنی با دانشجو:

گسترده‌گی زیاد مفاهیم ریاضیات، آن را تبدیل به یکی از درس‌های نسبتاً سفت در نظر اکثر دانشجویان کرده است. مهم‌ترین عامل غلبه بر این گسترده‌گی مطالب در درس ریاضی (۲)، توجه به مهم مورد نیاز برای یادگیری و همچنین طبقه‌بندی مناسب و منظم مطالب است. با مطالعه این جزوه این اطمینان را به شما می‌دهیم که ذهنیت شما نسبت به درس ریاضی (۲) تغییر خواهد کرد و علاوه بر موفقیت و کسب نتیجه مطلوب در این درس، به اعتماد به نفس و قدرت تحلیل بالا نیز دست خواهید یافت. تجربه ثابت کرده است که مطالعه درس ریاضی (۲) به روش منظم و طبقه‌بندی شده، این درس را به یکی از شیرین‌ترین دروس دوره کارشناسی در نظر دانشجویان تبدیل خواهد کرد.

✓ نکات مهم جزوه:

- ۱) قرارگیری مطالب اصلی (درسنامه) در ابتدای هر فصل به صورت طبقه‌بندی شده و منظم
- ۲) ارائه مثال‌های آموزشی کافی برای یادگیری کامل مطالب درسنامه
- ۳) ارائه تمرین مناسب هر مبحث در کنار مثال‌های آموزشی برای افزایش مهارت و تسلط بر مطالب فصل

از دانشجویان عزیز تقاضا داریم که نظرات خود را در مورد جزوه حاضر از طریق آیدی تلگرام **@Eshahebrahimi** و یا آدرس ایمیل: **Ebrahim_shahebrahimi@yahoo.com** مطرح نمایند.

ابراهیم شاه ابراهیمی

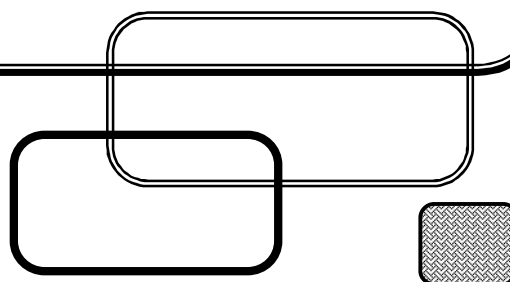
کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

زمستان ۹۶

استفاده از فایل کپی، PDF، عکس و ... مورد رضایت مؤلف نیست.

فصل اول



توابع برداری و رویه‌ها



< توابع برداری:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \xrightarrow{\text{مرکز انحنا}} (x_0, y_0) = \vec{r} + R \cdot \vec{N}$$

دایره بوسان
(دایره انحنا)

$$\kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

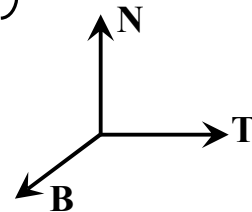
(۱) انحنا

$$\tau = \frac{(\vec{V} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}'}{|\vec{V} \times \vec{a}|^2}$$

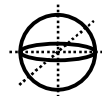
(۲) تاب

بردار نرمال صفحه قائم	$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{ \vec{V} }$	(۱) T (یکه مماسی)	} (۳) بردارهای کنج فرنه (N, B, T)
بردار نرمال صفحه بوسان	$\vec{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{ \vec{V} \times \vec{a} }$	(۲) B (یکه قائم فرعی)	
بردار نرمال صفحه اصلاحی	$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$	(۳) N (یکه قائم اصلی)	

نکته:
 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ (معادله‌ی صفحه)

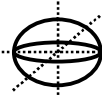


< رویه‌ها:



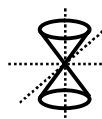
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

(۱) کره



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

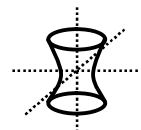
(۲) بیضی گون



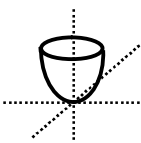
(۵) مخروط

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (یکپارچه)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (دوپارچه)} \end{array} \right.$$



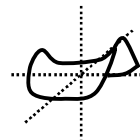
(۶) سهموی



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

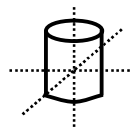
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

(۷) زین اسبی



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(۸) استوانه بیضوی





مثال ۱) معادله منحنی $\vec{R}(t) = (2 + \sqrt{2} \cos t)\vec{i} + (1 - \sin t)\vec{j} + (3 + \sin t)\vec{k}$ مفروض است. بردارهای B, N, T و انحنا و تاب آن را در لحظه $t = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.

$$\vec{v}(t) = (-\sqrt{2} \sin t, -\cos t, \cos t) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} \vec{v} = (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}(t) = (-\sqrt{2} \cos t, \sin t, -\sin t) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} \vec{a} = (-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{a}'(t) = (\sqrt{2} \sin t, \cos t, -\cos t) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} \vec{a}' = (1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = 2$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}{\sqrt{2}} = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{2}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}'}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \cdot (1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})}{2^2} = 0$$

نکته:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



مثال ۲ فرض کنید $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$. مطلوبست کنج فرنه، انحنا، تاب و مرکز دایره‌ی انحنا در $t = 0$.

$$\vec{v}(t) = (e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t), e^t) \xrightarrow{t=0} \vec{v}(0) = (1, 1, 1) \rightarrow |\vec{v}(0)| = \sqrt{3}$$

$$\vec{a}(t) = (-re^t \sin t, re^t \cos t, e^t) \xrightarrow{t=0} \vec{a}(0) = (0, 2, 1)$$

$$\vec{a}'(t) = (-re^t (\sin t + \cos t), re^t (\cos t - \sin t), e^t) \xrightarrow{t=0} \vec{a}'(0) = (-2, 2, 1)$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2) \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = \sqrt{6}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}(0)}{|\vec{v}(0)|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(-1, -1, 2)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\tau = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}'}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{(-1, -1, 2) \cdot (-2, 2, 1)}{\sqrt{6}^2} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{\kappa} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \vec{r}(t_0) + \vec{R} \cdot \vec{N}(t_0) = (1, 0, 1) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

الف) انحنا، تاب و مرکز دایره‌ی انحنا در نقطه‌ی $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

ب) تاب در $t = 1$ مطلوب است:

ج) معادله‌ی دایره‌ی انحنا

د) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در $t = 1$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \\ z = \frac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad \text{تمرین ۱} \quad \text{برای ماریچ}$$

تمرین ۲ فرض کنید C منحنی $\vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ است. مطلوب است:

بردارهای T, N, B و مقادیر انحنا و تاب در نقطه‌ی متناظر با $t = 0$. (خواجه نصیر - اردیبهشت ۹۶)

تمرین ۳ برای منحنی هلیکس مطلوب است: بردارهای کنج فرنه و مقادیر انحنا و تاب.



تمرین ۴ منحنی C به وسیله معادلات پارامتری $x = e^t \sin 2t$ و $y = e^t \cos 2t$ و $z = 2e^t$ داده شده است. شعاع انحنای منحنی در لحظه‌ی $t = 0$ را بیابید.

.....

تمرین ۵ معادله صفحه بوسان، قائم و اصلاحی خم فضایی $f(t) = (t + \frac{1}{3}t^3)\vec{i} + (t - \frac{1}{3}t^3)\vec{j} + t^3\vec{k}$ در نقطه نظیر $t = 1$ را بیابید.

.....

مثال ۳ معادله رویه‌هایی را بیابید که منحنی‌های زیر روی آن‌ها قرار دارند؟

الف) $\vec{R}(t) = (2 + \sqrt{2} \cos t)\vec{i} + (1 - \sin t)\vec{j} + (3 + \sin t)\vec{k}$

ب) $\vec{r}(t) = (2t \cos t + 1, 3t \sin t + 2, 4\sqrt{1+t^2})$

الف) $x = 2 + \sqrt{2} \cos t \rightarrow \cos t = \frac{x-2}{\sqrt{2}} \quad (I)$

$y = 1 - \sin t \rightarrow \sin t = 1 - y \quad (II)$

$z = 3 + \sin t \rightarrow \sin t = z - 3 \quad (III)$

$\xrightarrow{(II),(III)} 1 - y = z - 3 \rightarrow y + z = 4 \quad (\text{صفحه})$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \xrightarrow{(I),(II)} (1-y)^2 + \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad (\text{استوانه بیضوی})$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \xrightarrow{(I),(III)} (z-3)^2 + \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad (\text{استوانه بیضوی})$

$\sin^2 t + \sin^2 t + 2 \cos^2 t = 2 \xrightarrow{(I),(II),(III)} (z-3)^2 + (1-y)^2 + (x-2)^2 = 2 \quad (\text{کره})$

ب) $x = 2t \cos t + 1 \rightarrow \cos t = \frac{x-1}{2t} \quad (I)$

$y = 3t \sin t + 2 \rightarrow \sin t = \frac{y-2}{3t} \quad (II)$

$z = 4\sqrt{1+t^2} \rightarrow t^2 = \frac{z^2}{16} - 1 \quad (III)$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \xrightarrow{(I),(II)} \left(\frac{y-2}{3t}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2t}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{(y-2)^2}{9t^2} + \frac{(x-1)^2}{4t^2} = 1$

$\rightarrow \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{4} = t^2 \xrightarrow{(III)} \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{z^2}{16} - 1$

$\rightarrow \frac{-(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \quad (\text{هذلولی گون دو پارچه})$

.....

تمرین ۶ رویه $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$ را رسم کنید. (خواجه نصیر - اردیبهشت ۹۶)



تمرین ۷ (پencil) تعیین کنید خم‌های زیر روی کدام رویه‌ها قرار دارند؟

الف) $\vec{r}(t) = (\cos t, \cos 2t, \sin t)$

ب) $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j} + e^t \cos t \vec{k}$

مثال ۴ (پencil) منحنی فصل مشترک دو رویه $\begin{cases} y\sqrt{3} + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

طول قوس خم، کنج فرنه، انحنا و تاب خم را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y\sqrt{3} + z = 1 & (*) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} & (**) \end{cases} \rightarrow z = 1 - \sqrt{3} \sin t$$

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, 1 - \sqrt{3} \sin t)$$

$$\vec{v}(t) = (-2 \sin t, \cos t, -\sqrt{3} \cos t) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t + 3 \cos^2 t} = \sqrt{4} = 2$$

$$\vec{a}(t) = (-2 \cos t, -\sin t, \sqrt{3} \sin t)$$

$$\vec{a}'(t) = (2 \sin t, -\cos t, \sqrt{3} \cos t)$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin t & \cos t & -\sqrt{3} \cos t \\ -2 \cos t & -\sin t & \sqrt{3} \sin t \end{vmatrix} = (0, 2\sqrt{3}, 2) \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = 4$$

$$L = \int_0^{2\pi} |\vec{v}(t)| dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 2t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\sin t, \frac{1}{2} \cos t, \frac{-\sqrt{3}}{2} \cos t\right)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\sin t & \frac{1}{2} \cos t & \frac{-\sqrt{3}}{2} \cos t \end{vmatrix} = \left(-\cos t, \frac{-1}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\right)$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \quad \tau = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}'}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{(0, 2\sqrt{3}, 2) \cdot (2 \sin t, -\cos t, \sqrt{3} \cos t)}{4^2} = 0$$

نکته:

$$L = \int_a^b |\vec{v}(t)| dt \quad \text{طول قوس:}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}$$

تمرین ۸ (پencil) برای مثال ۴ مطلوب است:

ب) معادله صفحه بوسان در $(0, 1, 1 - \sqrt{3})$

الف) معادله صفحه قائم در $(2, 0, 1)$



مثال ۵) اگر C خم فصل مشترک رویه‌های $z = x^2 + y^2$ و $\frac{z^2}{4} = 1 + x^2 + y^2$ باشد، آنگاه

مطلوب است بردارهای T, N, B و انحنا و تاب خم. (خواجه نصیر - خرداد ۹۵)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + \frac{z^2}{4} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \rightarrow z = 1 + \frac{z^2}{4} \xrightarrow{\text{مرتب}} z^2 - 4z + 4 = 0 \rightarrow (z-2)^2 = 0 \rightarrow z = 2$$

$$\xrightarrow{z=x^2+y^2} 2 = x^2 + y^2 \xrightarrow{\text{پارامتری}} \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 2) \\ R'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) \\ R''(t) = (-\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 0) \end{cases}$$

$$\vec{T} = \frac{R'}{|R'|} = \frac{(-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0)}{\sqrt{(-\sqrt{2} \sin t)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2}} = \frac{(-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0)}{\sqrt{2}} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\vec{B} = \frac{R' \times R''}{|R' \times R''|} = \frac{(0, 0, 2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t)}{2} = \frac{(0, 0, 2)}{2} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = (-\cos t, -\sin t, 0) \quad \kappa = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow \text{(چون } x^2 + y^2 = 2 \text{ دایره است)}$$

$\tau = 0 \leftarrow \text{و چون خم در صفحه است}$

مثال ۶) معادله دایره بوسان بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ را در نقطه‌ی $(0, 3)$ بیابید.

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \xrightarrow{\text{پارامتری کردن}} \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \rightarrow \vec{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$\vec{v}(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t) \xrightarrow[t=\frac{\pi}{2}]{(0, 3)} \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2, 0) \rightarrow |\vec{v}| = 2$$

$$\vec{a}(t) = (-2 \cos t, -3 \sin t) \xrightarrow[t=\frac{\pi}{2}]{(0, 3)} \vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -3) \rightarrow |\vec{a}| = 3$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 6) \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = 6$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-2, 0, 0)}{2} = (-1, 0, 0) \quad \vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(0, 0, 6)}{6} = (0, 0, 1) \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = (0, -1, 0)$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4} \rightarrow R = \frac{4}{3}$$

$$\text{مرکز دایره} = \vec{r}(t_0) + R \cdot \vec{N}(t_0) = (0, 3) + \frac{4}{3}(0, -1) = (0, \frac{5}{3})$$

$$(x-0)^2 + (y-\frac{5}{3})^2 = (\frac{4}{3})^2 \rightarrow x^2 + (y-\frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$$



تمرین ۹ معادله دایره بوسان (دایره‌ی انحنای) را برای منحنی $y = x^2 - \sin x$ در $(0,0)$ بیابید.

.....

مثال ۷ انحنای منحنی $4x^2 + 2y^2 = 8$ را در نقطه‌ی $(\sqrt{2}, 0)$ بیابید.

$$4x^2 + 2y^2 = 8 \rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{پارامتری کردن}} \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \rightarrow \vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t)$$

$$\vec{v}(t) = (-\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t, 0) \xrightarrow{t=0} \vec{v}(0) = (0, 2, 0) \rightarrow |\vec{v}| = 2$$

$$\vec{a}(t) = (-\sqrt{2} \cos t, -2 \sin t, 0) \xrightarrow{t=0} \vec{a}(0) = (-\sqrt{2}, 0, 0)$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = (0, 2, 0) \times (-\sqrt{2}, 0, 0) = (0, 0, 2\sqrt{2})$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

.....

تمرین ۱۰ شعاع انحنای منحنی $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ را در $x = \sqrt{3}$ بیابید.

.....

مثال ۸ بیشترین انحنای منحنی $y = e^x$ را بیابید.

$$\xrightarrow{\text{پارامتری کردن}} \vec{r} = (t, e^t, 0)$$

$$\vec{v} = (1, e^t, 0) \rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = (1, e^t, 0) \times (0, e^t, 0) = (0, 0, e^t)$$

$$\vec{a} = (0, e^t, 0)$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{e^t}{(\sqrt{1+e^{2t}})^3}$$

برای یافتن ماکزیمم انحنای باید معادله‌ی $\kappa' = 0$ را حل کنیم:

$$\kappa' = \frac{e^t(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}} - e^t(\frac{3}{2} \times 2e^{2t}(1+e^{2t})^{\frac{1}{2}})}{(1+e^{2t})^3} = 0 \xrightarrow{\text{صورت}} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \underbrace{e^t(1+e^{2t})^{\frac{1}{2}}}_{\neq 0} \underbrace{(1+e^{2t} - 3e^{2t})}_{1-2e^{2t}} = 0 \rightarrow 1-2e^{2t} = 0$$

$$e^{2t} = \frac{1}{2} \rightarrow e^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله‌ی انحنای}} \kappa_{\max} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{1+\frac{1}{2}})^3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ماکزیمم انحنای در نقطه‌ی $(\ln \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ رخ می‌دهد.

.....

تمرین ۱۱ کمترین شعاع انحنای در نقاط منحنی به معادله‌ی $y = \ln x$ را بیابید.



این فایل بصورت **نمونه ای از جزوه اصلی** ارسال شده است.
برای سفارش فایل اصلی به آدرس اینترنتی EbiMath.com مراجعه فرمایید.

ممنون که با رعایت قانون کپی رایت ما را یاری میکنید.

مولف : ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

آیدی تلگرام : t.me/EShahebrahimi

ایمیل: shahebrahimie@gmail.com

برای دریافت نمونه سوالات بیشتر به همراه پاسخ تشریحی

به آدرس اینترنتی زیر مراجع کنید :

EbiMath.com