



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ریاضیات مهندسی

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: آنالیز فوریه (سری، انتگرال، تبدیل)

فصل ۲: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

فصل ۳: آنالیز مختلط (توابع تحلیلی، نگاشت، لوران، مانده، انتگرال مختلط)



این فایل بصورت **نمونه ای از جزوه اصلی** ارسال شده است.
برای سفارش فایل اصلی به آدرس اینترنتی EbiMath.com مراجعه فرمایید.

ممنون که با رعایت قانون کپی رایت ما را یاری میکنید.

مولف : ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

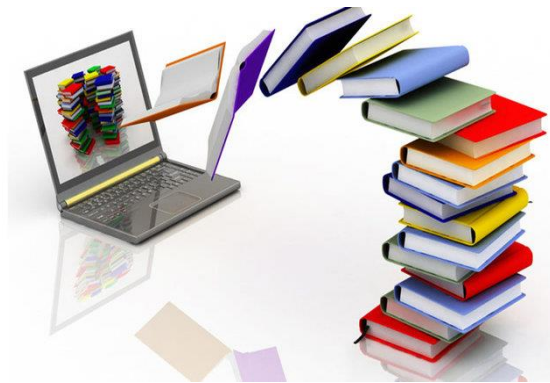
آیدی تلگرام : t.me/EShahebrahimi

ایمیل: shahebrahimie@gmail.com

برای دریافت نمونه سوالات بیشتر به همراه پاسخ تشریحی

به آدرس اینترنتی زیر مراجع کنید :

EbiMath.com



محصولات آموزشی مبحثی ریاضی عمومی ۱:

لینک خرید فیلم مبحثی " حد "

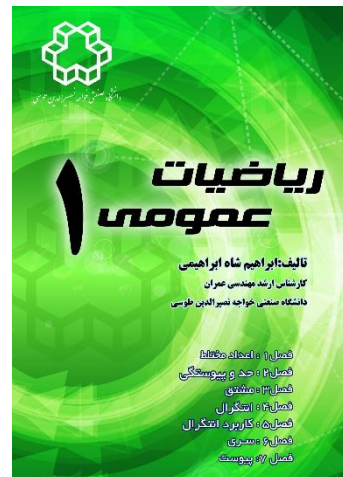
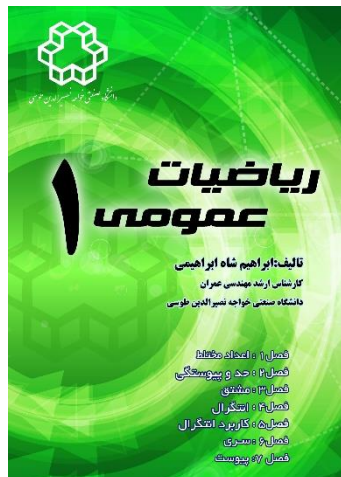
لینک خرید فیلم مبحثی " مشتق "

لینک خرید فیلم مبحثی " اعداد مختلط "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال "

لینک خرید فیلم مبحثی " کاربرد انتگرال "

لینک خرید فیلم مبحثی " سری "



محصولات آموزشی مبحثی ریاضی عمومی ۲:

لینک خرید فیلم مبحثی " توابع برداری و رویه ها "

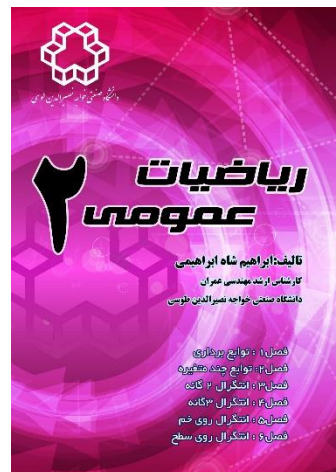
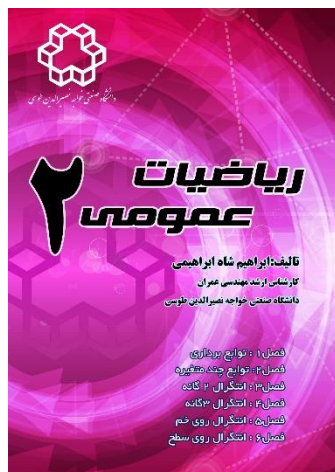
لینک خرید فیلم مبحثی " توابع چندمتغیره "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال دوگانه "

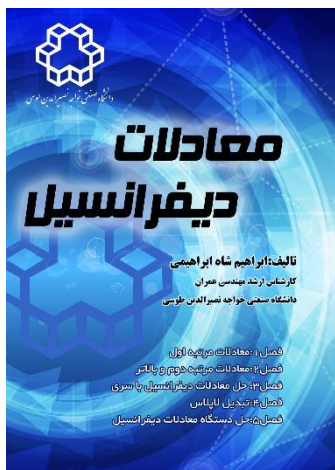
لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال سه گانه "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال روی خم "

لینک خرید فیلم مبحثی " انتگرال روی سطح "



محصولات آموزشی مبحثی معادلات دیفرانسیل :



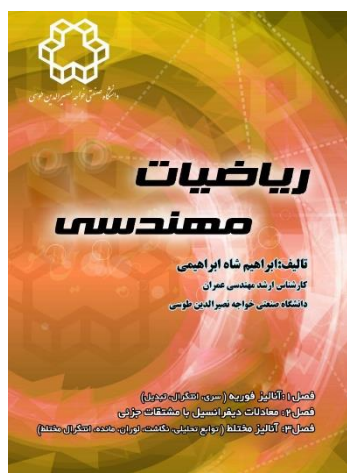
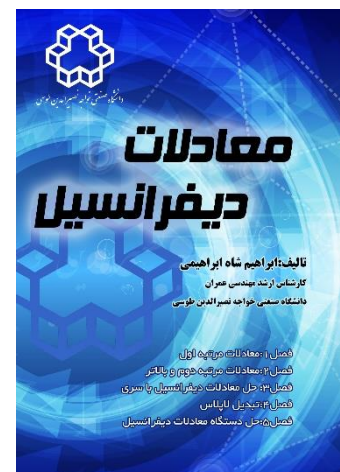
لینک خرید فیلم مبحثی "معادلات مرتبه اول"

لینک خرید فیلم مبحثی "معادلات مرتبه دوم و بالاتر"

لینک خرید فیلم مبحثی "سری"

لینک خرید فیلم مبحثی "لاپلاس"

لینک خرید فیلم مبحثی "حل دستگاه"

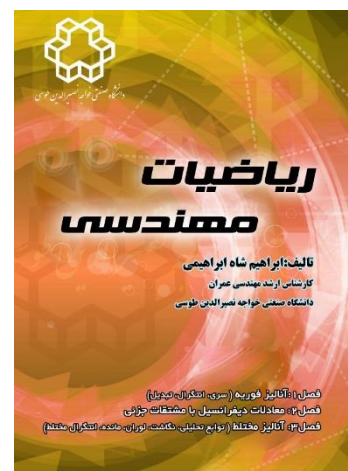


محصولات آموزشی مبحثی ریاضیات مهندسی :

لینک خرید فیلم مبحثی "آنالیز فوریه"

لینک خرید فیلم مبحثی "معادلات PDE"

لینک خرید فیلم مبحثی "آنالیز مختلط"



پک کامل محصولات آموزشی:

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی "ریاضی عمومی ۱"

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی "ریاضی عمومی ۲"

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی "معادلات دیفرانسیل"

آکادمی کوپری با همکاری انجمن علمی مهندسی صنایع خواجه نصیرالدین طوسی و دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی و انجمن های علمی بزرگ کشور برگزار می کند:

کارگاه جمع بندی معادلات دیفرانسیل

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیران
- دیپلمات

زمان: جمعه ۲۰ خرداد از ساعت ۱۰ به مدت ۴ ساعت

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

آکادمی کوپری با همکاری انجمن های علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و انجمن های علمی بزرگ عمران کشور برگزار می کند:

صفر تا صد انتگرال

۱ تعریف، ۷ قانون، ۷ تکنیک

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- ۱. مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- ۲. مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- ۳. مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- ۴. مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- ۵. مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- ۶. عضو هیئت مدیران
- ۷. دیپلمات

زمان: جمعه ۳۰ مهر

قسمت اول ساعت ۱۲-۱۳ و قسمت دوم ساعت ۱۶-۱۷

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

آکادمی کوپری با همکاری انجمن علمی مهندسی عمران، انجمن علمی مهندسی صنایع و دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی و انجمن های علمی بزرگ کشور برگزار می کند:

کارگاه جمع بندی ریاضی ۲

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیران
- دیپلمات

زمان: پنجشنبه ۱۹ خرداد از ساعت ۱۰ به مدت ۴ ساعت

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

انجمن علمی دانشکده مهندسی مکانیک برگزار می کند:

کارگاه آموزش انتگرال

ویژه ورودی های ۹۸

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

زمان: پنجشنبه ۲۵ مهر ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

آکادمی کوپری با همکاری انجمن علمی عمران دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی و شهید بهشتی برگزار می کند:

کارگاه جمع بندی ریاضی

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیران
- دیپلمات

زمان: جمعه ۳۰ مهر

قسمت اول ساعت ۱۲-۱۳ و قسمت دوم ساعت ۱۶-۱۷

Rooyadestan.ir

انجمن علمی دانشکده مهندسی مکانیک برگزار می کند:

کلاس جمع بندی ریاضی ۱

ویژگی آمادگی در امتحان میانترم

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

زمان: پنجشنبه ۲۳ آبان ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

کارگاه جمع بندی میانترم ریاضی مهندسی

آبازر فوری و حل معادلات با مشتقات جزئی (PDE)

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیران
- دیپلمات

زمان: پنجشنبه ۲۵ مهر ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

کارگاه جمع بندی آتلاین آزمون میان ترم ریاضی

سر فصل ها: حد و پیوستگی | مشتق و کاربرد | اعداد مختلط | توابع متعالی

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیران
- دیپلمات

زمان: پنجشنبه ۲۵ مهر ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

صفر تا صد انتگرال در یک روز

تعریف | قانون | تکنیک

مدرس: مهندس ابراهیم شاه ابراهیمی

بستر برگزاری: اسکای روم

سر فصل ها:

- مؤلف کتاب های ریاضی، ریاضی ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی ۳
- به بحث سری ها
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد موسسه نوین تکرش عمران
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- مهندس تخصصی ریاضیات کشور ارشد محاکات گروه آموزشی سرگت
- عضو هیئت مدیران
- دیپلمات

زمان: پنجشنبه ۲۵ مهر ماه ساعت ۹

مکان: دانشکده مهندسی مکانیک

لینک ثبت نام:

Rooyadestan.ir/?p=۵۳۳۱۴

تضمین کیفیت فیلم های آموزشی:

اگر از هر محصولی رضایت نداشتید، کل هزینه عودت داده خواهد شد.

سخنی با دانشجو:

گسترده‌گی زیاد مفاهیم ریاضیات، آن را تبدیل به یکی از درس‌های نسبتاً سفت در نظر اکثر دانشجویان کرده است. مهم‌ترین عامل غلبه بر این گسترده‌گی مطالب، توجه به حجم مورد نیاز برای یادگیری و همچنین طبقه‌بندی مناسب و منظم مطالب است. با مطالعه این جزوه این اطمینان را به شما می‌دهیم که ذهنیت شما نسبت به درس ریاضیات مهندسی تغییر خواهد کرد و علاوه بر موفقیت و کسب نتیجه مطلوب در این درس، به اعتماد به نفس و قدرت تحلیل بالا نیز دست خواهید یافت.

✓ نکات مهم جزوه:

- (۱) قرارگیری مطالب اصلی (درسنامه) در ابتدای هر فصل به صورت طبقه‌بندی شده و منظم
 - (۲) ارائه مثال‌های آموزشی کافی برای یادگیری کامل مطالب درسنامه
 - (۳) ارائه تمرین مناسب هر مبحث در کنار مثال‌های آموزشی برای افزایش مهارت و تسلط بر مطالب فصل
- از دانشجویان عزیز تقاضا داریم که نظرات خود را در مورد جزوه حاضر از طریق آیدی تلگرام **@Eshahebrahimi** و یا آدرس ایمیل: **Ebrahim_shahebrahimi@yahoo.com** مطرح نمایند.

ابراهیم شاه ابراهیمی

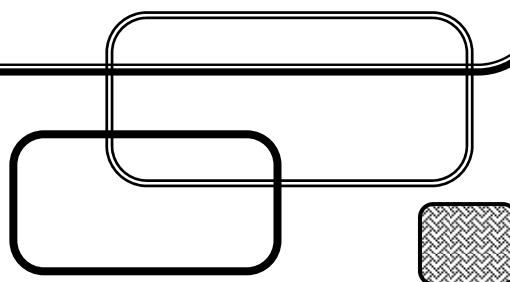
کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

زمستان ۹۷

استفاده از فایل کپی، PDF، عکس و ... مورد رضایت مؤلف نیست.

فصل اول



آنالیز فوریه



(۱) سری فوریه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \xrightarrow{n=0} a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{cases}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (\text{اتحاد پارسوال})$$

(۲) انتگرال فوریه:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)) d\omega$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_0^{\infty} (A^2(\omega) + B^2(\omega)) d\omega \quad (\text{اتحاد پارسوال})$$

(۳) تبدیل فوریه:

$$F(f(x)) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

$$F^{-1}(\hat{f}(\omega)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^2(\omega) d\omega \quad (\text{اتحاد پارسوال})$$

نکات: ۱- قضیه همگرایی سری و انتگرال فوریه (دیریکله): $f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

۲- تابع متناوب با دوره تناوب T : $f(x+T) = f(x)$ ، $L = \frac{T}{2}$

۳- تابع زوج: $f(-x) = f(x)$ ← متقارن نسبت به محور y ها
تابع فرد: $f(-x) = -f(x)$ ← متقارن نسبت به مبدأ



پیشنیاز: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

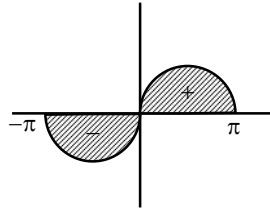
$$۱) \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$= -\frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n} (\cos(n\pi) - \cos(0)) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{2}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\text{نکته: } \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$۲) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx$$

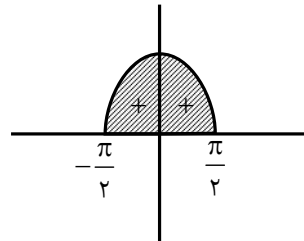
$$= \text{صفر}$$



$$\text{نکته: } f(-x) = f(x) \rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$۳) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 2 \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$



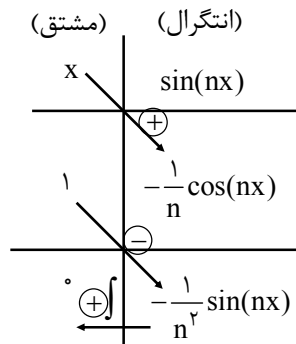
$$\text{نکته: } f(-x) = f(x) \rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$۴) \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$$

$$= 2 \left(-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1}$$

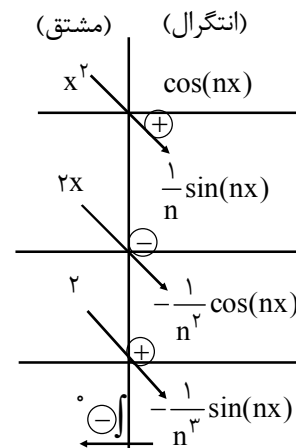


$$۵) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

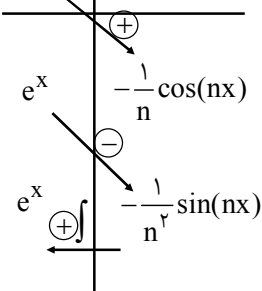
$$= 2 \left(\frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{4\pi}{n^2} (-1)^n$$





$$۶) \int e^x \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} e^x \cos(nx) + \frac{1}{n^2} e^x \sin(nx) - \frac{1}{n^2} \int e^x \sin(nx) dx$$

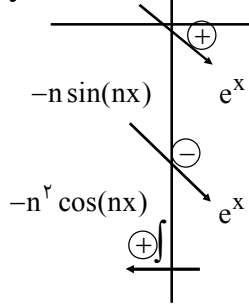


$$\rightarrow I = \frac{1}{n^2} e^x (\sin(nx) - n \cos(nx)) - \frac{1}{n^2} I$$

$$\rightarrow (1 + \frac{1}{n^2}) I = \frac{1}{n^2} e^x (\sin(nx) - n \cos(nx)) \rightarrow I = \frac{e^x (\sin(nx) - n \cos(nx))}{n^2 + 1}$$

.....

$$۷) \int \cos(nx) e^x dx = e^x \cos(nx) + n e^x \sin(nx) - n^2 \int \cos(nx) e^x dx$$



$$\rightarrow I = e^x (\cos(nx) + n \sin(nx)) - n^2 I$$

$$\rightarrow (1 + n^2) I = e^x (\cos(nx) + n \sin(nx)) \rightarrow I = \frac{e^x (\cos(nx) + n \sin(nx))}{n^2 + 1}$$

.....

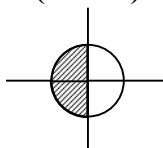
$$۸) \int_0^\pi \sin(nx) \cos(x) dx$$

$$\text{نکته: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right) \Big|_0^\pi = \frac{n(1 - \cos n\pi)}{n^2 - 1} \quad n \neq 1$$

$$\text{نکته: } \cos(\pi \pm n\pi) = -\cos(n\pi)$$



نکته: برای $n = 1$ حاصل انتگرال را جداگانه محاسبه می کنیم :

$$\xrightarrow{n=1} \int_0^\pi \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) \Big|_0^\pi = 0$$



$$۹) \int_0^{\pi} \cos(nx) \cos(x) dx$$

← حل مشابه مثال ۸

$$\text{نکته: } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

روش دوم: انتگرال گیری جز به جز مشابه مثال ۶ و ۷

$$\int_0^{\pi} \cos(nx) \cos(x) dx = \cos(nx) \sin(x) - n \sin(nx) \cos(x) + n^2 \int \cos(nx) \cos(x)$$

$$I = \cos(nx) \sin(x) - n \sin(nx) \cos(x) + n^2 I$$

$$\rightarrow (1 - n^2) I = \cos(nx) \sin(x) - n \sin(nx) \cos(x)$$

$$\rightarrow I = \frac{\cos(nx) \sin(x) - n \sin(nx) \cos(x)}{1 - n^2} \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (n \neq 1)$$

نکته: برای $n = 1$ حاصل انتگرال را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\xrightarrow{n=1} \int_0^{\pi} \cos(x) \cos(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi$$

$$۱۰) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx$$

(تمرین)

$$\text{روش ۱: نکته: } \sin \alpha \cos \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

روش ۲: انتگرال گیری جز به جز مشابه مثال ۹

$$\text{پاسخ: } \left[\frac{\sin(n\pi)}{1 - n^2} \right] \quad (n \neq 1)$$

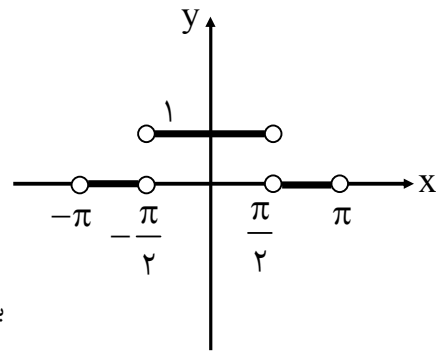
(if $n = 1 \rightarrow \pi$)



مثال ۱: الف) سری فوریه تابع متناوب داده شده ($T = 2\pi$) را بیابید.

ب) درستی قضیه همگرایی سری فوریه را برای $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$



پاسخ:

با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع داده شده «زوج» است $\leftarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \xrightarrow{L=\pi} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 dx \right) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \xrightarrow{L=\pi} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

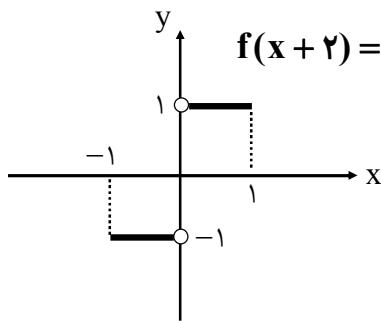
$$\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0 \times \cos(nx) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \times \cos(nx) + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \times \cos(nx) \right) = \frac{1}{\pi} \left(2 \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه دیریکله}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi) \longrightarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} + 0 \quad \checkmark$$



$$f(x+2) = f(x)$$

مثال ۲: الف) سری فوریه تابع با نمودار داده شده را بیابید.
ب) درستی قضیه همگرایی سری فوریه را برای $x = 0$ بررسی کنید.

با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع داده شده «فرد» است $\leftarrow a_0 = a_n = 0$: پاسخ

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \xrightarrow{L=1} b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 -\sin(n\pi x) dx + \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{-1}^0 + \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n}\right) \sin(n\pi x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n}\right) \sin(0) \xrightarrow{\text{دیریکله}} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0 = 0 \quad \checkmark$$

مثال ۳: برای تابع متناوب داده شده سری فوریه را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{پاسخ: } a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \xrightarrow{L=\pi} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1 dx = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \xrightarrow{L=\pi} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(nx) dx = -\frac{1}{n\pi} \sin(nx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{-\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi)}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \xrightarrow{L=\pi} b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{n\pi} (\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}$$

$$\xrightarrow{\text{سری فوریه}} f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-\sin(n\pi) + (\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1) \sin(nx))$$

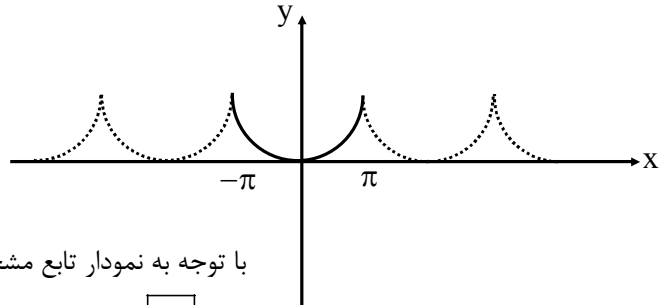


مثال ۴: الف) سری فوریه $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ، $-\pi < x < \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$ را بیابید.

ب) به کمک قسمت الف حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$



با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع داده شده «زوج» است $\leftarrow b_n = 0$ پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \xrightarrow{L=\pi} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \xrightarrow{L=\pi} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{4\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{n^2} \cos(n\pi) \right) = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) : \text{سری فوریه} \longrightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

ب: $\xrightarrow{x=\pi} f(\pi) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$
با توجه به خواسته سوال

دیریکله $\xrightarrow{f(\pi)} f(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$$\rightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6} \rightarrow A = \frac{\pi^2}{6}$$

$\xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
با توجه به خواسته سوال

دیریکله $\xrightarrow{f(0)} f(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0$

$$\rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \rightarrow -B = -\frac{\pi^2}{12} \rightarrow B = \frac{\pi^2}{12}$$



این فایل بصورت **نمونه ای از جزوه اصلی** ارسال شده است.
برای سفارش فایل اصلی به آدرس اینترنتی EbiMath.com مراجعه فرمایید.

ممنون که با رعایت قانون کپی رایت ما را یاری میکنید.

مولف : ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

آیدی تلگرام : t.me/EShahebrahimi

ایمیل: shahebrahimie@gmail.com

برای دریافت نمونه سوالات بیشتر به همراه پاسخ تشریحی

به آدرس اینترنتی زیر مراجع کنید :

EbiMath.com