



آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲ رشته‌های مهندسی تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۴/۲
مدت زمان پاسخ‌گویی: ۱۲۰ دقیقه

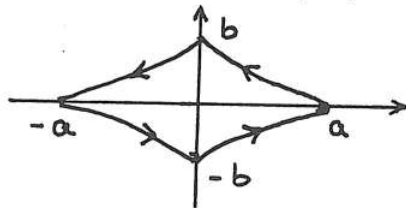
****توجه: درک سوال جزء امتحان می باشد لطفا سوال نفرمایید.****

****توجه: بارم سوال یک و پنج، ۲۰ نمره، دو و چهار ۲۵ نمره و سوال سه ۳۰ نمره می باشد.****

۱. مطلوبست محاسبه جرم لایه D محدود به $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ و $\sqrt{3}x \geq y$ و $\sqrt{3}x \leq y$ واقع در ربع اول صفحه، در صورتیکه تابع چگالی $\delta(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ فرض شده باشد.

۲. ابتدا انتگرال $\iiint_{\Omega} y^2 \sin(\pi y) dx dy dz$ را که در آن ناحیه ای محدود به $y = \pi/2, z = 0, z = x$ محاسبه کنید. سپس برای آن دو تعبیر فیزیکی ارائه دهید.

۳. اگر هیپوسیکلوئید C به معادله $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$ باشد، به کمک قضیه گرین انتگرال خط زیر را حساب کنید.



$$\oint_C (x^2 y \cos(x) + 2xy \sin(x) - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin(x) - 2ye^x + x) dy$$

۴. انتگرال سطح زیر را حساب کنید.

$$\iint_{\sigma} (e^z + 2xy) dy dz + (1 + \tan^2 x + y^2) dx dz + (3x^2 - 5yz + 5z) dx dy$$

در آن σ قسمتی از رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ با شرط $z > 0$ در نظر گرفته شده است.

۵. با استفاده از قضیه استوکس انتگرال $\oint_C \vec{F} \circ d\vec{r}$ را محاسبه کنید در آن $\vec{F} = \langle -2y, 2x, z \rangle$ و خم ساده بسته C فصل مشترک $z = \pi$ و $x^2 + y^2 = 1$ می باشد.

به نام خدا

استاد امید نیکان

گروه 64 و 79

پاسخنامه‌ی تشریحی پایانترم ریاضی عمومی 2 تیر ماه 97

۱. مطلوبست محاسبه جرم لایه D محدود به $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ و $\sqrt{3}x \geq y$ و $\sqrt{3}y \geq x$ ، واقع در ربع اول صفحه، در صورتیکه تابع چگالی $\delta(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ فرض شده باشد.

پاسخ سوال 1:

$$\leq x^2 + y^2 \leq 9 \quad u = x^2 + y^2 \quad 1 \leq u \leq 9$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3} \quad v = \frac{y}{x} \quad \frac{1}{3} \leq v \leq \sqrt{3}$$

*فرمول جرم:

$$m = \iint \delta(x, y) dA$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2 + 2\frac{y^2}{x^2}}$$

از رابطه * داریم:

$$\begin{aligned} m &= \int_1^9 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \tan^{-1} v \frac{1}{2(1+v^2)} dv du = \frac{1}{2}(9-1) \left(\frac{1}{2} (\tan^{-1}(\sqrt{3}))^2 - \frac{1}{2} \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right)^2 \right) \\ &= 2 \times \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

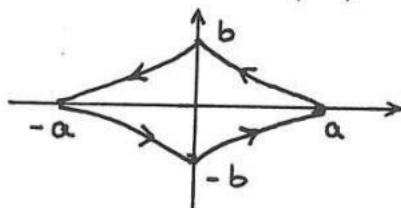
می دانیم:

$$\int \frac{\tan^{-1}(v)}{1+v^2} dv = \frac{(\tan^{-1}(v))^2}{2}$$

$$\tan^{-1}(v) = w \rightarrow \frac{dv}{1+v^2} = dw$$

$$\int w dw = \frac{w^2}{2}$$

۳. اگر هیپوسیکلوئید C به معادله $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$ باشد، به کمک قضیه گرین انتگرال خط زیر را حساب کنید.



$$\oint_C (x^2 y \cos(x) + 2xy \sin(x) - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin(x) - 2ye^x + x) dy$$

پاسخ سوال 3 :

$$\int (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x + x) dy = *$$

$$(x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x) = M$$

$$(x^2 \sin x - 2ye^x + x) = N$$

چون منحنی C بسته است و در جهت پادساعتگرد است لذا می توان از قضیه گرین استفاده کرد:

$$* = \iint_{\text{روی منحنی } C} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_C dA = \text{مساحت منحنی } C$$

برای به دست آوردن مساحت منحنی C معادله پارامتری $1 = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$ را به دست می آوریم:

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t$$

$$* = \frac{1}{2} [\int -y dx + x dy] = A \text{ مساحت}$$

$$dx = -3a \sin t \cos^2 t \leftarrow x = a \cos^3 t$$

$$dy = 3a \cos t \sin^2 t \leftarrow y = a \sin^3 t$$

$$* = \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} (3a^2 \sin^4 t \cos^2 t + 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t) dt \right] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8}$$

می دانیم:

$$\int \sin^2 t \cos^2 t dt = \int \frac{\sin^2(2t)}{4} dt = \int \frac{1 - \cos 4t}{8} dt = \frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} + C$$

۴. انتگرال سطح زیر را حساب کنید.

$$\iint_{\sigma} (e^z + 3xy) dydz + (1 + \tan^2 x + y^2) dx dz + (3x^2 - 5yz + 5z) dx dy$$

در آن σ قسمتی از رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ با شرط $z > 0$ در نظر گرفته شده است.

پاسخ سوال 4 :

$$\iint F \cdot ds = \iiint \text{div}(F) dv = *$$

$$F = (e^z + 3ay, 1 + \tan^2 x + y^2, 3x^2 - 5yz + 5z)$$

$$\text{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot F = 3y + 2y - 5y + 5 = 5$$

از رابطه * داریم:

$$* = \iiint 5 dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} 5r dz dr de = \int_0^{2\pi} \int_0^2 5(4-r^2) r dr de = \int_0^{2\pi} 5(2r^2 - \frac{r^4}{4}) \Big|_0^2 de$$

$$de = 5 \times 2\pi(8 - 4) = 40\pi$$

۵. با استفاده از قضیه استوکس انتگرال $\oint_C \vec{F} \circ d\vec{r}$ را محاسبه کنید در آن $\vec{F} = \langle -2y, 3x, z \rangle$ و خم ساده بسته C فصل مشترک $z = \pi$ و $x^2 + y^2 = 1$ می باشد.

پاسخ سوال 5 :

$$\oint_C F \cdot dr = \iint \text{curl}(F) \cdot \overrightarrow{Nd\tau} = *$$

که $\overrightarrow{Nd\tau}$ برابر است با: $(-g_x, -g_y, 1)$ $z = g(x, y)$

$$\text{curl}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & 3x & z \end{vmatrix} = (0 - 0, 0 - 0, 5) = (0, 0, 5)$$

$$z = \pi = g(x, y) \quad \overrightarrow{Nd\tau} = (-g_x, -g_y, 1) = (0, 0, 1)$$

از رابطه * داریم:

$$* = \iint (0, 0, 5) \cdot (0, 0, 1) dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 5 dA = 5 \times (\text{مساحت دایره به شعاع 1}) = 5 \times \pi \times 1^2 = 5\pi$$