

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲		مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه
نیمسال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱		تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۳/۲۳
نام و نام خانوادگی:		شماره دانشجویی:

لطفا جواب سوالات را خوانا و به ترتیب در برگه پاسخ نامه بنویسید.

استفاده از ماشین حساب و تلفن همراه ممنوع می باشد.

۱. گشتاور ماند حاصل از دوران صفحه فلزی D که توسط خطوط و منحنی های $y = 6, y = 2, xy = 3, xy = 1$ محدود شده است را با تابع چگالی x حول محور x بیابید.

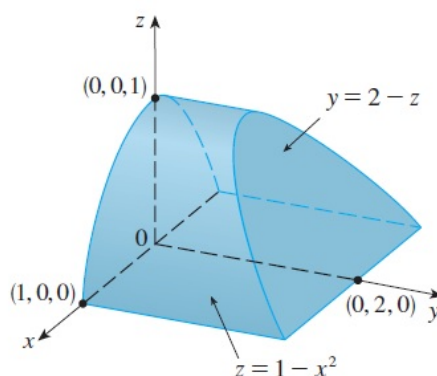
۲. حجم محصور بین سهمیگون $z = y^2 + (x-1)^2$ و صفحه $2x + z = 2$ را محاسبه کنید.

۳. انتگرال $\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma$ را روی سطح زیر بیابید.

$$S = \{(x, y, z); x > 0, y > 0, 0 < z < 3, z^2 = 3(x^2 + y^2)\}$$

۴. انتگرال $\int_C (-xy^2) dy + (1 + x^2y) dx$ را روی نیم دایره C به شعاع a و مرکز مبدا در جهت پادساعتگرد محاسبه نمایید.

۵. شار برونسوی میدان برداری $\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz}, \sin(xy))$ از سطح شکل زیر را بیابید.



۶. الف) نشان دهید که $\text{div}(\text{curl } \vec{F}) = 0$

ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید آیا میدان برداری مانند $\vec{G}$ هست که $\text{curl}(\vec{G}) = (0, -z^2, yz)$

ج) کار انجام شده توسط میدان $\vec{F} = (0, -z^2, yz)$ روی منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x = 0$ را بیابید.

موفق و پیروز باشید

به نام خدا

استاد امید نیکان

گروه 64 و 79

پاسخنامه‌ی تشریحی پایانترم ریاضی عمومی 2 خرداد ماه 401

۱. گشتاور ماند حاصل از دوران صفحه فلزی D که توسط خطوط و منحنی های $xy = 1, xy = 3, y = 2, y = 6$ محدود شده است را با تابع چگالی x حول محور x بیابید.

پاسخ سوال 1 :

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dy dx$$

$$D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases} \quad \delta(x, y) = x \text{ : تابع چگالی}$$

فرض روبه رو داریم : با $u = xy, v = y$

$$D' \in \begin{cases} 1 \leq u \leq 3 \\ 2 \leq v \leq 6 \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{y} = \frac{1}{v}$$

پاسخ سوال 2 :

$$I_x = \iiint y^2 x dy dx = \iiint y x dy dx = \int_1^3 \int_2^6 uv \frac{1}{v} dv du = \int_1^3 u(6-2) du = \frac{4u^2}{2} \Big|_1^3 = 18 - 2 = 16$$

۲. حجم محصور بین سهمیگون $z = (x-1)^2 + y^2$ و صفحه $x+z=2$ را محاسبه کنید.

$$D \in \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 2x + 1 \\ z = 2 - 2x \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

مختصات استوانه ای

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2-2r\cos\theta+1}^{2-2r\cos\theta} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2}$$

۳. انتگرال $\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma$ را روی سطح زیر بیابید.

$$S = \{(x, y, z); x > 0, y > 0, 0 < z < 3, z^2 = 3(x^2 + y^2)\}$$

پاسخ سوال 3 :

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} = g(x, y)$$

$$\iint_S f(x, y, z) = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy = *$$

$$\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{1 + \frac{3x}{x^2 + y^2} + \frac{3y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$3 = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{3}$$

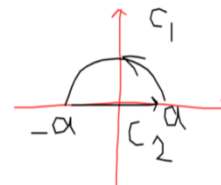
$$* = \iint_R (x^2 + y^2) 2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} 2r^3 dr d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta = 2 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

چون در صورت سوال x, y مثبت می باشند لذا در ربع اول قرار دارند $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ قرار دارد .

۴. انتگرال $\int_C (-xy^2) dy + (1 + x^2y) dx$ را روی نیم دایره C به شعاع a و مرکز مبدا در جهت پادساعتگرد محاسبه نمایید.

پاسخ سوال 4 :

توجه داشته باشیم قضیه گرین برای محیط های بسته است
چون فقط خم C_1 خواسته اید نیم دایره کامل قضیه گرین را
می گیریم و سپس خم C_2 را از آن کم می کنیم .



لذا
بکار

$$M = 1 + x^2 y$$

$$N = -xy^2$$

$$\oint_{C'} (1 + x^2 y) dx + (-x^2 y) dy = \iint (N_x - M_y) dy dx$$

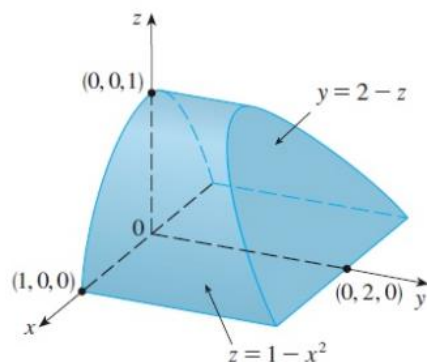
$$= - \iint (y^2 + x^2) dy dx = - \int_0^\pi \int_0^a -r^2 r dr d\theta = \frac{-\pi a^4}{4}$$

حالا خم C_2 را از عبارت بدست آمده کم می کنیم :

$$\left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right. \rightarrow -a \leq t \leq a \rightarrow \int_{-a}^a (1 + 0) dt + 0 \times 0 = 2a$$

$$\int_{C_1} (1 + x^2 y) dx + (1 - x^2 y) dy = \frac{-\pi a^4}{4} + 2a$$

۵. شار برونسوی میدان برداری $\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ از سطح شکل زیر را بیابید.



پاسخ سوال 5 :

$$\operatorname{div}(F) = y + 2y + 0 = 3y$$

$$D \in \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 - z \end{cases} \rightarrow 0 \leq z \leq 1 - x^2$$

$$\iiint_C = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y dy dz dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y^2 \Big|_0^{2-z} dz dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (2-z)^2 dz dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (2-z)^3 \Big|_0^{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (8 - (2 - (1 - x^2)))^3 dx = 8 - \int_{-1}^1 (1 + x^2)^3 dx = \frac{184}{35}$$

۶. الف) نشان دهید که $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) = 0$

ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید آیا میدان برداری مانند $\vec{G}$ هست که $\operatorname{curl}(\vec{G}) = (0, -z^2, yz)$

ج) کار انجام شده توسط میدان $\vec{F} = (0, -z^2, yz)$ روی منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x = 0$ را بیابید.

پاسخ سوال 6 :

الف)

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}(F)) = 0, F = (M, N, P)$$

می دانیم :

$$\operatorname{div}(G) = \nabla \cdot G$$

$$\operatorname{curl}(F) = \nabla \times F$$

بنابراین :

$$\text{div}(\text{curl}(F)) = \nabla \cdot (\nabla \times F)$$

بردار $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ تعریف می شود و از طرفی سمت راست طرف بالا یک ضرب

جعبه ای می باشد که به صورت زیر می باشد :

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{pmatrix} = 0$$

در ماتریس اگر یک سطر یا ستون مضربی از هم باشد دترمینان آن صفر است .

ب) با توجه به اینکه قسمت الف منفی است چون اگر میدان برداری G موجود باشد :

$$\text{div}(\text{curl}(G)) = 0$$

اما :

$$\text{div}(\text{curl}(G)) = 0 + 0 + y = y \neq 0$$

ج) کار انجام شده توسط نیروی F

$$W = \oint F \cdot dr$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y^2 + z^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} y = \cos t \\ z = \sin t \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = 0, y(t) = \cos t, z = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$W = \oint F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, -\sin^2(t), \cos(t) \cdot \sin(t)) \cdot (0, -\sin(t), \cos(t)) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^3(t) + \cos^2(t) \sin(t)) dt = \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = \cos 0 - \cos 2\pi = 0$$