

به نام خدا		
مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه	 دانشگاه علم و فناوری دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	آزمون پایانترم ریاضی عمومی ۲
تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۲۳		نیمسال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳
شماره دانشجویی:		نام و نام خانوادگی:

لطفاً جواب سوالات را خوانا و به ترتیب در برگه پاسخ نامه بنویسید.

استفاده از ماشین حساب و تلفن همراه ممنوع می باشد.

۱. انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_{\tan^{-1} y}^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx dy$ را محاسبه نمایید.

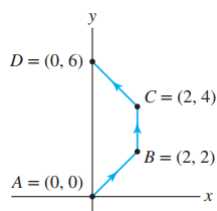
۲. حجم ناحیه محدود به دو سهمی گون $z = x^2 + 2y^2$ و $z = 12 - 2x^2 - y^2$ را بیابید.

۳. فرض کنید نیروی برداری $F(x, y, z) = (axy + z, x^2, bx + 2z)$ یک میدان پایستار (ابقایی) باشد.

الف) ابتدا مقادیر a و b و سپس تابع پتانسیل f را بیابید.

ب) کار انجام شده روی خم C از نقطه $(1, 1, 0)$ تا نقطه $(0, 0, 3)$ را بدست آورید.

۴. انتگرال خط $\int (\sin x + y)dx + (3x + y)dy$ را روی مسیر زیر محاسبه کنید.



۵. شار برونسوی میدان برداری $F(x, y, z) = (2x + yz^2, y - 5x^3z, x + y + z)$ از سطح S که محدود به مخروطهای

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ و کره های $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است، را بدست آورید.

۶. فرض کنیم میدان برداری $F(x, y, z) = (e^x - y^3, e^y + x^3, e^z)$ باشد و خم C از تقاطع رویه های $z = 2xy$

و $x^2 + y^2 = 1$ بدست آید. با استفاده از قضیه استوکس، کار انجام شده $\int_C F \cdot dr$ را بدست آورید.

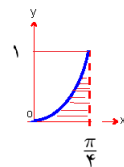
موفق و پیروز باشید

پاسخ سوالات مربوط به پایانترم ریاضی عمومی ۲ به مورخ ۲۳ دی ۱۴۰۲

سوال ۱. انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_{\tan^{-1} y}^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx dy$ را محاسبه نمایید.

پاسخ سوال ۱ : درانتگرال دوگانه فوق توصیف افقی بیان شده است زیرا dx مقدم بر dy است.

$$\text{توصیف افقی} \Rightarrow dxdy \quad \begin{cases} \text{محدوده } y \text{ منظم} & 0 \leq y \leq 1 \\ \text{محدوده } x \text{ نامنظم} & \tan^{-1} y \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



اکنون توصیف قائم (dy مقدم بر dx) محدوده فوق را مینویسیم

$$\text{توصیف قائم} \Rightarrow dydx \quad \begin{cases} \text{محدوده } x \text{ منظم} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{محدوده } y \text{ نامنظم} & 0 \leq y \leq \tan x \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_{\tan^{-1} y}^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\tan x} \sec x dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec x dx = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sec(0) = \sqrt{2} - 1$$

$$\boxed{\int \sec x \tan x dx = \sec x + C}$$

سوال ۲. حجم ناحیه محدود به دو سهمیگون $z = 12 - 2x^2 - y^2$ و $z = x^2 + 2y^2$ را بیابید.

پاسخ سوال ۲ : همانطور که می‌دانیم فرمول حجم از رابطه $V = \iiint_T dV$ بدست می‌آید. چون تلاقی دو سهمی وار می‌باشد از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. ابتدا درگام نخست فصل مشترک رویه‌ها بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} z = 12 - 2x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 2y^2 \end{cases} \Rightarrow 12 - 2x^2 - y^2 = x^2 + 2y^2 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 12 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$\boxed{x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dV = r dz dr d\theta}$$

$$\begin{cases} z(0, 0) = 12 - 2(0)^2 - 0^2 = 12 \\ z(0, 0) = (0)^2 + 2(0)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2y^2 \leq z \leq 12 - 2x^2 - y^2$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{x^2+2y^2}^{12-2x^2-y^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 2x^2 - y^2 - x^2 - 2y^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3(x^2 + y^2)) r dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3r^2) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12r - 3r^3) dz dr d\theta = (2\pi - 0) \times \left(6r^2 - \frac{3r^4}{4}\right) \Big|_0^2 = 2\pi(24 - 12) = 24\pi$$

سوال ۳. فرض کنید نیروی برداری $F(x, y, z) = (axy + z, x^2, bx + 2z)$ یک میدان پایستار (ابقایی) باشد. الف) ابتدا مقادیر a و b و سپس تابع پتانسیل f را بیابید.

ب) کار انجام شده روی خم C از نقطه $(1, 1, 0)$ تا نقطه $(0, 0, 3)$ را بدست آورید.

پاسخ سوال ۳ : قسمت الف) چون نیروی برداری $F(x, y, z)$ یک میدان پایستار (ابقایی) است، لذا داریم $\vec{O} = \text{Curl}(F) = (0, 0, 0)$. پس می‌توان به صورت زیر داشته باشیم:

$$\text{Curl}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ axy + z & x^2 & bx + 2z \end{vmatrix} = (0 - 0, 1 - b, 2x - ax) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 1 - b = 0 & \Rightarrow b = 1 \\ 2x - ax = 0 & \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

اکنون با قرار دادن a و b میدان برداری F به صورت $F = (2xy + z, x^2, x + 2z)$ تعریف می‌شود. اکنون برای بدست آوردن تابع پتانسیل f باید شرط $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = F = (2xy + z, x^2, x + 2z)$ برقرار باشد

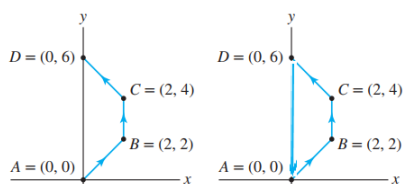
$$\begin{cases} f_x = 2xy + z \Rightarrow f = x^2y + xz \\ f_y = x^2 \Rightarrow f = x^2y \\ f_z = x + 2z \Rightarrow f = xz + z^2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع پتانسیل} = f = x^2y + xz + z^2 + C. \quad (1)$$

قسمت ب) چون میدان پایستار (ابقایی) است لذا میزان کار انجام شده مستقل از مسیر است و برابر است با

$$W = \int_C F \cdot dr = f(\text{نقطه انتها}) - f(\text{نقطه ابتدا}) = f(B) - f(A) = f(0, 0, 3) - f(1, 1, 0) = 9 - 1 = 8$$

سوال ۴ انتگرال خط $\int (\sin x + y)dx + (3x + y)dy$ را روی مسیر زیر محاسبه کنید.

پاسخ سوال ۴ :



ابتدا منحنی غیر بسته را با کمک پاره خط $\overrightarrow{DA}$ بسته و سپس قضیه گرین باتوجه به اینکه منحنی بسته و در جهت مثلثاتی است و نیز M و N دارای مشتقات جزیی مرتبه اول پیوسته می باشند، بکار می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{DA}} (\sin x + y) dx + (3x + y) dy &= \iint_{\text{دوزنقه به قاعده‌های ۶ و ۲ و ارتفاع ۲}} (N_x - M_y) dA \\ &= 2 \iint_{\text{دوزنقه به قاعده‌های ۶ و ۲ و ارتفاع ۲}} dA = 2 \times [\text{مساحت دوزنقه به قاعده‌های ۶ و ۲ و ارتفاع ۲}] = 2 \times \frac{(6+2) \times 2}{2} = 16 \end{aligned}$$

اکنون انتگرال خط مسیر $\overrightarrow{DA}$ جداگانه حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA} = (1-t)D + tA = (1-t)(0, 6) + t(0, 0) = (0, 6-6t), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x = 0 \Rightarrow dx = 0, \quad y = 6-6t \Rightarrow dy = -6dt, \end{cases}$$

$$\int_{\overrightarrow{DA}} (\sin x + y) dx + (3x + y) dy = \int_0^1 (\sin 0 + 6-6t) \cdot 0 + (3 \cdot 0 + 6-6t)(-6dt) = -18$$

$$\int_{\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{CD}} (\sin x + y) dx + (3x + y) dy = 16 - (-18) = 34$$

سوال ۵. شار برونسوی میدان برداری $F(x, y, z) = (2x + yz^2, y - 5x^3z, x + y + z)$ از سطح S که محدود به مخروط‌های $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ و کره‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است، را بدست آورید.

پاسخ سوال ۵: چون سطح محدود به S بسته است لذا می‌توان برای بدست آوردن میزان شار عبوری از سطح S از سمت راست قضیه دیورژانس استفاده کرد:

$$\boxed{S \text{ میزان شار عبوری از سطح } = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV}$$

$$\operatorname{div}(F) = M_x + N_y + P_z = 2 + 1 + 1 = 4$$

چون ناحیه سطح S شامل فصل مشترک دو کره و دو مخروط می باشد از مختصات کروی استفاده می کنیم

$$\boxed{x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi, \quad dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq 2 & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos \phi = \rho \sin \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos \phi = \sqrt{3} \rho \sin \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} S \text{ میزان شار عبوری از سطح } &= \iiint_T 4 dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 4 \times (2\pi - 0) \times (\cos(\frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{\pi}{4})) \times (\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}) = \frac{28\pi}{3} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

سوال ۶. فرض کنیم میدان برداری F به صورت $F(x, y, z) = (e^x - y^3, e^y + x^3, e^z)$ باشد و خم C از تقاطع رویه‌های $z = 2xy$ و $x^2 + y^2 = 1$ بدست آید. با استفاده از قضیه استوکس، کار انجام شده $\int_C F \cdot dr$ را بدست آورید.

پاسخ سوال ۶: بنا بر قضیه استوکس داریم:

$$\boxed{\oint_C F \cdot dr = \iint \operatorname{Curl}(F) \cdot \vec{Nd\sigma}}$$

$$\vec{Nd\sigma} = (-g_x, -g_y, 1) dA, \quad \text{where } z = g(x, y)$$

نخست $\operatorname{Curl}(F)$ را محاسبه می کنیم

$$\operatorname{Curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x - y^3 & e^y + x^3 & e^z \end{vmatrix} = (0, 0, 3(x^2 + y^2))$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi & 0 \leq r \leq 1 & dA = r dr d\theta \\ z = 2xy = g(x, y) \Rightarrow \vec{Nd\sigma} = (-g_x, -g_y, 1) dA = (-2y, -2x, 1) dA \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot (-2y, -2x, 1) dA = 3 \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dA = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta \\ &= 3 \times (2\pi - 0) \times (\frac{r^4}{4} \Big|_0^1) = 3 \times \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$