

بسمه تعالی

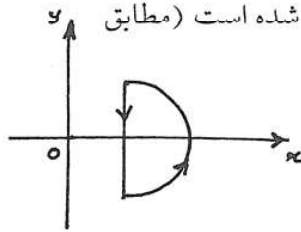


آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲ رشته‌های مهندسی تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲
مدت زمان پاسخ‌گویی: ۱۲۰ دقیقه

****توجه: درک سوال جزء امتحان می باشد لطفا سوال نفرمایید.****

****توجه: بارم سوال یک ۴۰ نمره، و باقی هر یک ۲۰ نمره می باشند.****

۱. فرض کنید D ناحیه بسته و کراندار محدود به خط $x = 1$ و نیم دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x = 0$ با شرط $x \geq 1$ باشد و C مرز آن را تشکیل دهد، که مرز در جهت مثبباتی پیموده شده است (مطابق شکل)،



الف) انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ را حساب کنید.

ب) درستی قضیه گرین در صفحه را بر ناحیه D فوق و میدان برداری زیر تحقیق کنید.

$$\vec{F}(x, y) = (x \ln(x^2 + y^2)) \vec{i} + ((y+1) \ln(x^2 + y^2)) \vec{j}$$

۲. اگر D ناحیه محصور بین $x^2 + y^2 = 1$ ، $x^2 + y^2 = 4$ ، $y = x^2/2$ و $y = x^2$ واقع در ربع اول باشد. انتگرال $\iint_D \frac{2y^2 + x^2}{x^3} dx dy$ را حساب کنید.

۳. مطلوبست محاسبه $I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ ، که در آن Ω ناحیه ای محدود به مخروط

$z^2 = x^2 + y^2$ و به صفحات $z = 0$ و $z = 1$ باشد.

۴. فرض کنید $C: r(t) = (a \cos t) \vec{i} + (a \sin t) \vec{j} + (\frac{2}{\pi} bt) \vec{k}$ و $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ معادله منحنی C و میدان برداری

$$\vec{F} = (e^x \cos y + yz) \vec{i} + (xz - e^x \sin y) \vec{j} + xy \vec{k}$$

تعریف شده است. مطلوبست محاسبه انتگرال خط $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

۵. به کمک انتگرال سطح، شار کل عبوری (به سمت خارج) بر سطح بسته $\sigma_1: z = 4x^2 + y^2$ و $\sigma_2: z = 125 - (x^2 + 4y^2)$ تحت میدان برداری $\vec{F} = 4x \vec{i}$ را محاسبه کنید.

موفق باشید

دانشکده ریاضی

به نام خدا

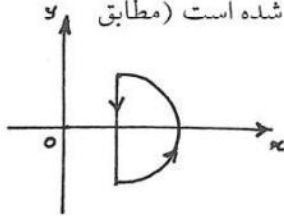
استاد امید نیکان

گروه 64 و 79

پاسخنامه‌ی تشریحی پایانترم ریاضی عمومی 2 دی ماه 97

۱. فرض کنید D ناحیه بسته و کراندار محدود به خط $x = 1$ و نیم دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x = 0$

با شرط $x \geq 1$ باشد و C مرز آن را تشکیل دهد، که مرز در جهت مثلثاتی پیموده شده است (مطابق شکل)،



الف) انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ را حساب کنید.

ب) درستی قضیه گرین در صفحه را بر ناحیه D فوق و میدان برداری زیر تحقیق کنید.

$$\vec{F}(x, y) = (x \ln(x^2 + y^2)) \vec{i} + ((y+1) \ln(x^2 + y^2)) \vec{j}$$

پاسخ سوال 1:

الف)

معادله دایره در دستگاه قطبی برابر $r = 2\cos\theta$ است. همچنین محل تقاطع خط $x=1$ و دایره برابر است با:

$$2\cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} \rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

بنابراین ناحیه R در دستگاه قطبی به صورت زیر توصیف می شود:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq 2\cos\theta$$

لذا:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta - 1) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 \end{aligned}$$

ب)

چون F در ناحیه R دارای مشتقات جزئی پیوسته و C یک خم بسته ساده است می توان از قضیه گرین استفاده کرد:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \frac{2x(y+1)}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy = 2$$

۲. اگر D ناحیه محصور بین $x^2 + y^2 = 1$ ، $x^2 + y^2 = 4$ ، $y = x^2/2$ و $y = x^2$ واقع در ربع اول باشد. انتگرال $\iint_D \frac{2y^2 + x^2}{x^3} dx dy$ را حساب کنید.

پاسخ سوال 2 :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 4, \quad \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \frac{y}{x^2} = 1$$

آن گاه:

$$V = \frac{y}{x^2} \quad \frac{1}{2} \leq V \leq 1, \quad a = x^2 + y^2 \quad 1 \leq a \leq 4$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -2y & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{4y^2}{x^4}}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^4 \left(\frac{2y^2 + x^2}{x^3}\right) x \quad J \, du \, dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^4 \left(\frac{2y^2 + x^2}{x^3}\right) \times \left(\frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{4y^2}{x^4}}\right) du \, dv = \frac{1}{2} (4 - 1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

۴. فرض کنید $C: r(t) = (a \cos t) \vec{i} + (a \sin t) \vec{j} + \left(\frac{c}{\pi} t\right) \vec{k}$ و $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ معادله منحنی C و میدان برداری

$$\vec{F} = (e^x \cos y + yz) \vec{i} + (xz - e^x \sin y) \vec{j} + xy \vec{k}$$

تعریف شده است. مطلوبست محاسبه انتگرال خط $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

پاسخ سوال 4 :

انتگرال $\int F \cdot dr$ را می توان با قضیه استوکس به دست آورد:

برای محاسبه ی $\int F \cdot dr$ ابتدا چک می کنیم میدان برداری $r(t) = (a \cos t, a \sin t, \frac{2}{\pi} bt)$ پایستار است یا خیر:

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y + yz & xz - e^x \sin y & xy \end{vmatrix} = (x - x, y - y, z - e^x \sin y - z + e^x \sin y) \\ = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

چون $\text{curl}(F) = \vec{0}$ بنابراین میدان برداری F پایستار است. برای به دست آوردن تابع پتانسیل f :

$$(f_x, f_y, f_z) = \nabla f = F = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy)$$

$$fx = e^x \cos y + yz + 0 \rightarrow f = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

$$fy = xz - e^x \sin y + 0 \rightarrow f = xyz + e^x \cos y + h(y, z)$$

$$fz = xy + 0 \rightarrow f = xyz$$

پس تابع پتانسیل برابر است با $f(x, y, z) = xyz + e^x \cos y$

$$\int F \cdot dr = f(\text{انتها}) - f(\text{ابتدا}) = f(0, a, b) - f(0, 0, a)$$

اگر میدان پایستار باشد $\int F \cdot dr = f(\text{انتها}) - f(\text{ابتدا})$ که $f =$ تابع پتانسیل است و نقطه ی انتها به ازای $t = \frac{\pi}{2}$ و ابتدا بازه $t=0$ به دست می آید.

نقطه ی انتها $B = (0, a, b)$

نقطه ی ابتدا $A = (a, 0, 0)$