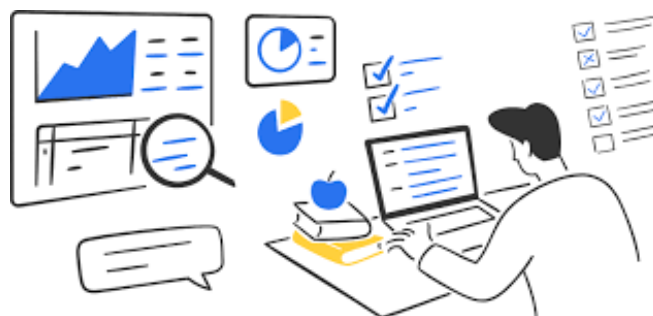




ریاضی عمومی ۲

انتگرال خم و سطح

تعداد تمرین : ۱۲

دانشگاه علم و صنعت

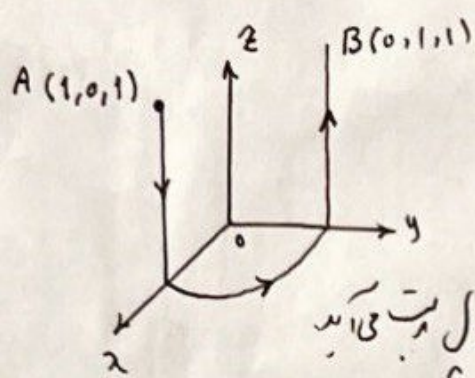
مؤلف: جناب آقای دکتر احمد رضا فروغ

ص ۱۱

مثال (۱) شوی بر سر نشان داده شده در شکل زیر حرکت می کند. کار انجام شده توسط این متحرک

تحت اثر میدان برداری $\vec{F} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}$

را محاسبه کنید.



حل: محاسبه کار از فرمول $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$

یا به فرم دیفرانسیلی آن $\int_C p dx + q dy + h dz$

$$\text{Curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz - 2x & xz - 2y & xy - 2z \end{vmatrix} = \langle x - x, y - y, z - z \rangle = \vec{0}$$

پس میدان پاتیل (درادمان) دارد. مستقل از مسیر است، فقط به نقطه ابتدا و انتهای خود بستگی دارد.

پس تابع پاتیل $\phi(x, y, z)$ را بدست آوریم

$\phi_1 = \int (yz - 2x) dx + H_1(y, z) = xyz - x^2 + H_1(y, z)$

$\phi_2 = \int (xz - 2y) dy + H_2(x, z) = xyz - y^2 + H_2(x, z)$

$\phi_3 = \int (xy - 2z) dz + H_3(x, y) = xyz - z^2 + H_3(x, y)$

تابع پاتیل می توانیم از $\phi = xyz - (x^2 + y^2 + z^2)$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(0, 1, 1) - \phi(1, 0, 1) = (-2) - (-2) = 0$$

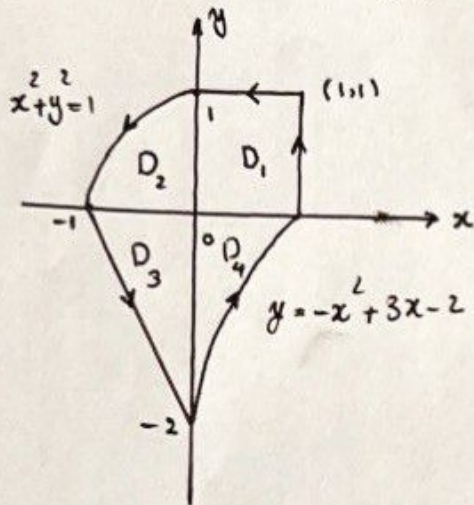
(2) ۴۴

سوال (2) مطلوبت کار انجام شده بر سینه برزی

$$\vec{F} = (y + \cos y - y \sin x) \vec{i} + (2x + \cos x - x \sin y) \vec{j}$$

که سترگی را در جهت مثبت روی سیر بسته C مطابق شکل زیر جای می کنند.

حل: به کمک قضیه گرین در صفحه حل می کنیم.



$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C p dx + Q dy \\ &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy \end{aligned}$$

$$Q_x - P_y = (2 - \sin x - \sin y) - (1 - \sin y - \sin x) = 1$$

پس با کم کردن می گردد به حل انتگرال در گانه زیر

$$W = \iint_D dx dy$$

اما این انتگرال در گانه در واقع مساحت داخلی هر گانه را می دهد.

$$A(D_1) = |x| = 1 \quad ; \quad A(D_2) = (1 \times \pi) \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad D_3 = (1 \times 2) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} A(D_4) &= \int_0^1 \int_{-x^2+3x-2}^0 dy dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

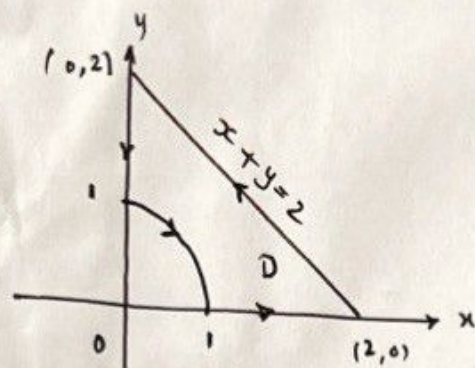
$$W = A(D) = \frac{\pi}{4} + 1 + 1 + \frac{5}{6} = \frac{\pi}{4} + \frac{17}{6}$$

(3) هر

$$\vec{F} = \langle -y^3, x^3 \rangle \text{ د یکنی شتون داده}$$

مثال (3): د دسی قضیه "رین" را برای میدان برداری

شده در شکل زیر تحقیق کنید. (یعنی ناحیه D را محصور کرده است)



حل: قضیه "رین"

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

برای چنین مسائلی می‌بایست هر طرف را به طریقی محاسبه کرده و نتایج را مقایسه کنیم. بهتر است ابتدا از انتگرال دوگانه شروع کنیم.

$$Q_x - P_y = 3(x^2 + y^2)$$

حال ابتدا انتگرال دوگانه را روی مثلث محاسبه کرده سپس روی ربع دایره، حاصل را از هم کم می‌کنیم.

$$\text{انتگرال روی مثلث}; \int_0^2 \int_0^{2-x} 3(x^2 + y^2) dy dx = \int_0^2 [y^3 + 3yx^2]_0^{2-x} dx$$

$$= 4 \int_0^2 (2 - 3x + 3x^2 - x^3) dx = 8$$

$$\text{انتگرال روی ربع دایره}; \int_0^{\pi/2} \int_0^1 3r^3 dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{4} r^4 \right]_0^1 d\theta = \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{حاصل نتایج}; 8 - \frac{3\pi}{8}$$

حال باید به روش مستقیم (انتگرال خطی) پاسخ را حاصل کرد. تخمیناً به C تقسیم شده است از سه پارچه خطی

دکتر ربع دایره که ربع دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیچیده شده است.

$$C_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t \rangle; 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$\vec{r}'(t) = \langle \cos t, -\sin t \rangle$$

(4)

$$C_2: (1-t)(1,0) + t(2,0) = \vec{r}_2(t) = \langle 1+t, 0 \rangle; 0 \leq t \leq 1 \rightarrow \vec{r}_2'(t) = \langle 1, 0 \rangle$$

$$C_3: (1-t)(2,0) + t(0,2) = \vec{r}_3(t) = \langle 2-2t, 2t \rangle; 0 \leq t \leq 1 \rightarrow \vec{r}_3'(t) = \langle -2, 2 \rangle$$

$$C_4: (1-t)(0,2) + t(0,1) = \vec{r}_4(t) = \langle 0, 2-t \rangle; 0 \leq t \leq 1 \rightarrow \vec{r}_4'(t) = \langle 0, -1 \rangle$$

$$\int_{C_1} = \int_0^{\pi/2} \langle -\cos^3 t, \sin^3 t \rangle \cdot \langle \cos t, -\sin t \rangle dt = - \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt$$

$$= - \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t \cos^2 t) dt = - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (3 + \cos 4t) dt = - \frac{1}{4} \left[3t + \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\pi/2} = - \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{C_2} = \int_0^1 \vec{F}(1+t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 \langle 0, (1+t)^3 \rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle dt = 0$$

$$\int_{C_3} = \int_0^1 \vec{F}(2-2t, 2t) \cdot \langle -2, 2 \rangle dt = \int_0^1 \langle -8t^3, 8(1-t)^3 \rangle \cdot \langle -2, 2 \rangle dt = 16 \int_0^1 (1-3t+3t^2) dt = 8$$

$$\int_{C_4} = \int_0^1 \vec{F}(0, 2-t) \cdot \langle 0, -1 \rangle dt = \int_0^1 \langle -(2-t)^3, 0 \rangle \cdot \langle 0, -1 \rangle dt = 0$$

$$\oint_C = -\frac{3\pi}{8} + 0 + 8 + 0 = 8 - \frac{3\pi}{8}$$

و لذا درستی بردار است.

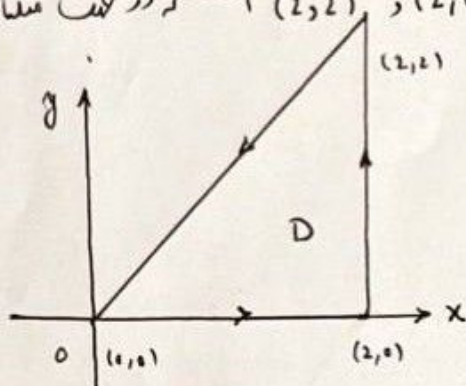
کدام در حین سانی استراژی انتخاب طرف چپ یا راست روی محاسبه هم است. بنابراین
از طرفی شروع کنیم که محاسبه کمتر و اطمینان درستی جواب است.

(5)

سوال (4) انتگرال خطی

$$\oint_C (xy^2 - 4e^{-x^2})dx + (2xy + 11\sqrt{1+y^3})dy$$

که در آن C راس مثلث (0,0)، (2,0)، (2,2) است که در جهت مثبت طی شده است.



حل: از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$Q_x - P_y = 4xy - 2xy = 2xy \quad ; \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\oint_C = \int_0^2 \int_0^x 2xy \, dy \, dx = \int_0^2 [xy^2]_0^x \, dx = \int_0^2 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4$$

نکته: برای آنکه علی‌الحساب $4e^{-x^2}$ نسبت به x تابع اولیه ندارد، لذا به کمک روش مستقیم امکان محاسبه وجود ندارد.

سوال (5) انتگرال $\oint_C \frac{-ydx + xdy}{4x^2 + 9y^2}$ را که در آن C یعنی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

حل: به کمک قضیه گرین تعمیم یافته انتگرال را می‌توانیم محاسبه کنیم. زیرا

$$P_y = Q_x = \frac{9y^2 - 4x^2}{(4x^2 + 9y^2)^2}$$

$$C': \vec{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{3} \sin t \right\rangle ; \quad dx = -\frac{1}{2} \sin t \, dt ; \quad dy = \frac{1}{3} \cos t \, dt ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

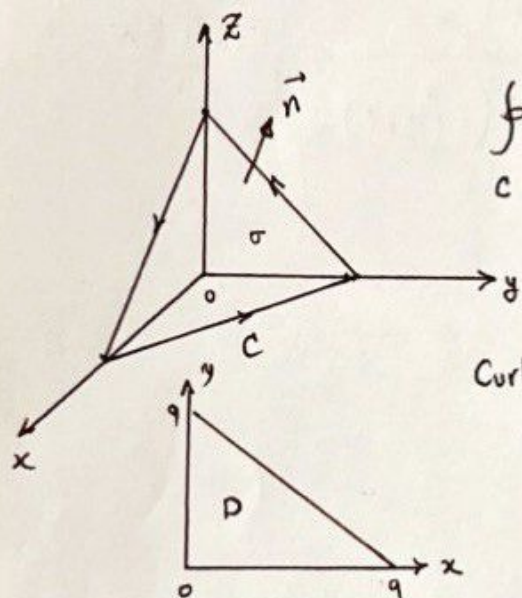
$$\oint_C = \oint_{C'} = \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{1}{3} \sin t\right) \left(-\frac{1}{2} \cos t\right) + \left(\frac{1}{2} \cos t\right) \left(\frac{1}{3} \sin t\right) \right] dt = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} dt = \frac{\pi}{3}$$

صفت (1)

$$\int_C x(z-y) dx + y(x-z) dy + z(y-x) dz \quad \text{مسئله (1) انتگرال خط}$$

که در آن C مثلثی با رئوس $(0,0,9)$ ، $(0,9,0)$ ، $(9,0,0)$ واقع بر صفحه $x+y+z=9$ است.

$$x+y+z=9 \quad \text{را به کمک قضیه استروکس محاسبه کنید.}$$



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma \quad \text{مسئله 1: قضیه استروکس}$$

$$\text{Curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x) \end{vmatrix}$$

$$= \langle z+y, x+z, y+x \rangle$$

$$\sigma: G := x+y+z-9=0; \quad \vec{\nabla} G = \langle 1, 1, 1 \rangle; \quad \|\vec{\nabla} G\| = \sqrt{3}$$

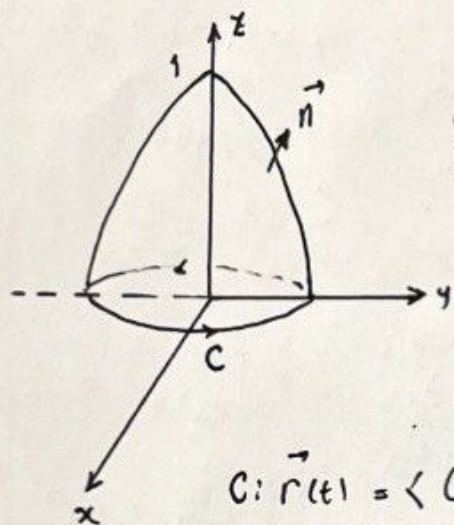
$$\vec{n} := \frac{\vec{\nabla} G}{\|\vec{\nabla} G\|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle; \quad d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{1+1+1} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9-x \end{cases} \quad \oint_C = \iint_D \langle z+y, x+z, y+x \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \underbrace{\sqrt{3} dx dy}_{d\sigma}$$

$$= 2 \iint_D (x+y+z) dx dy = 2 \iint_D (x+y+9-(x+y)) dx dy$$

$$= 18 \iint_D dx dy = 18 \times 9 \times 9 \times \frac{1}{2} = 729$$

(2) صفر

سؤال (2) - فرض کنید σ سطح $(z > 0) \quad z = 1 - (x^2 + y^2)$ است. رشی قضیه آرتس را برای میدان برداری $\vec{F} = \langle -2z, 3x, 4y \rangle$ ، این سطح محقق کنید.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

ابتدا انتگرال خطی که معنی آن $x^2 + y^2 = 1$

یا دایره واحد است را محاسبه می کنیم.

$$C: \vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle ; t \in [0, 2\pi]$$

$$d\vec{r} = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \langle 0, 3\cos t, 4\sin t \rangle$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = \langle 0, 3\cos t, 4\sin t \rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle = 3\cos^2 t = \frac{3}{2}(1 + \cos 2t)$$

$$\oint_C = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{3}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi$$

حال انتگرال سطح را محاسبه می کنیم، مقدار آن نیز باید 3π بدست آید، بنابراین

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = \langle 4, -2, 3 \rangle$$

$$G := z + (x^2 + y^2) - 1 = 0 \Rightarrow \nabla G = \langle 2x, 2y, 1 \rangle ; \|\nabla G\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

$$\iint_{\sigma} = \iint_{D: x^2 + y^2 \leq 1} \langle 4, -2, 3 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \langle 2x, 2y, 1 \rangle \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (8r^2 \cos \theta - 8r^2 \sin \theta + 3r) \, dr \, d\theta = \frac{8}{3} \sin \theta + \frac{8}{3} \cos \theta + \frac{3}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = 3\pi$$

ص ۳ (3)

سؤال (3) - یک قضیه دیریشی انتگرال سطح $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ را برای میدان برداری

$$\vec{F} = \langle 3x, y^2, yz \rangle$$

روی سطح خارجی σ مکعب واحد حساب کنید.

حل: این سطح واقع در ۸ ادا فضاست و طول هر ضلع آن برابر یک است.

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = 3 + 3y$$

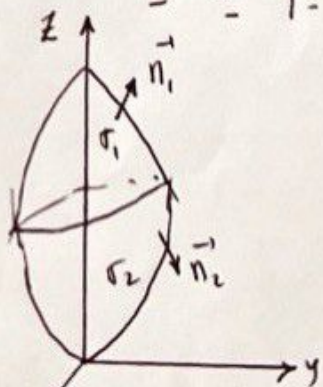
$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV$$

$$\iiint_{\sigma} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3 + 3y) dx dz dy = \int_0^1 (3 + 3y) dy = 3y + \frac{3}{2}y^2 \Big|_0^1 = \frac{9}{2}$$

نکته: اگر بخواهیم انتگرال سطح را مستقیماً حساب کنیم باید شش سطح را جداگانه (درجه مکعب) حساب کرده، همه را جمع کنیم.

سؤال (4) - یک قضیه دیریشی حجم نامیه مورد به درجه $\sigma_1: z = 72 - 6x^2 - 3y^2$

و $\sigma_2: z = 5y^2 + 2x^2$ را حساب کنید. سپس حاصل را با نام مستقیم تحقیق کنید.



$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} dv = V(\Omega)$$

با برای این میدان برداری را باید چنان بسازیم که

$$\text{div}(\vec{F}) \equiv 1$$

کافی است $\vec{F}$ را

$$\vec{F} = \langle x, 0, 0 \rangle$$

ضرورت زیر تعریف کنیم.

$$G_1: z + 6x^2 + 3y^2 = 0; \quad \vec{\nabla} G_1 = \langle 12x, 6y, 1 \rangle; \quad \|\vec{\nabla} G_1\| = \sqrt{1 + 144x^2 + 36y^2}$$

$$(4) \quad d\sigma_1 = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 144x^2 + 36y^2} dx dy$$

$$\begin{cases} z = 72 - 6x^2 - 3y^2 \\ z = 5y^2 + 2x^2 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 9 \quad ; \quad D: x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\sigma_2: G_2 := 5y^2 + 2x^2 - z = 0 \rightarrow \vec{\nabla} G_2 = \langle 4x, 10y, -1 \rangle ; \quad \|\vec{\nabla} G_2\| = \sqrt{1 + 16x^2 + 100y^2}$$

$$d\sigma_2 = \sqrt{1 + 16x^2 + 100y^2} dx dy$$

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{\nabla} G_1}{\|\vec{\nabla} G_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 144x^2 + 36y^2}} \langle 12x, 6y, 1 \rangle$$

$$\vec{n}_2 = \frac{\vec{\nabla} G_2}{\|\vec{\nabla} G_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16x^2 + 100y^2}} \langle 4x, 10y, -1 \rangle$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma_1 = 12x^2 dx dy \quad ; \quad \vec{F} \cdot \vec{n}_2 d\sigma_2 = 4x^2$$

$$\oiint_{\sigma} = \iint_{\sigma_1} + \iint_{\sigma_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (16r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta = 4 \int_0^{2\pi} [r^4]_0^3 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 324 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 162 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 324\pi$$

حال به روش مستقیم حجم را در مختصات استوانه‌ای حساب می‌کنیم.

$$\Omega: \begin{cases} 5y^2 + 2x^2 \leq z \leq 72 - 6x^2 - 3y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{5y^2 + 2x^2}^{72 - 6x^2 - 3y^2} dz r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (72 - 8r^2) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 162 d\theta = 324\pi$$

(5) 39

مثال (5) به بررسی مساحت سطح جانبی کره ای به شعاع R احاطه کنید.

حل: مساحت برای سولت فرض کرد که مرکز کره مبدأ مختصات است. مساحت سطح نیم کره

فوقانی کره $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ یعنی $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ احاطه کرده و در

عدد 2 ضرب می کنیم.

$$A(\sigma) = 2 \iint_{\sigma} d\sigma = 2 \iint_{D_{xy}: x^2 + y^2 \leq R^2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{R r dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= -2R \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R d\theta = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2$$

روش دوم: معادله پارامتری کره ای به شعاع R را می نویسیم

$$T(\varphi, \theta) = \langle R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \rangle \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$T_{\varphi} = \langle R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi \rangle$$

$$T_{\theta} = \langle -R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0 \rangle$$

$$\vec{T}_{\varphi} \times \vec{T}_{\theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

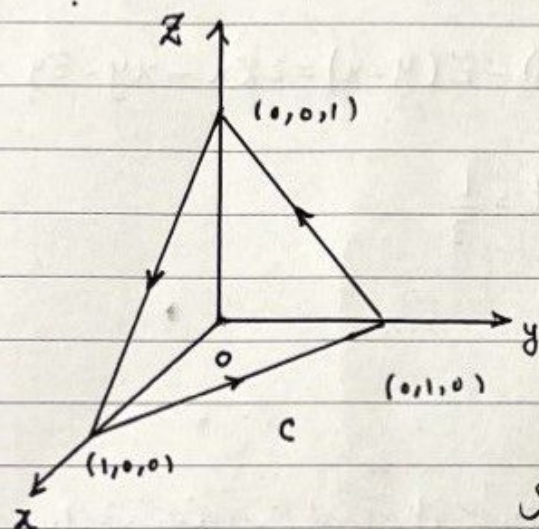
$$= \langle R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, R^2 \sin \varphi \cos \varphi \rangle$$

$$\begin{aligned} \|\vec{T}_{\varphi} \times \vec{T}_{\theta}\| &= R^2 \sin \varphi ; \quad A(\sigma) = \iint_{D: x^2 + y^2 \leq R^2} R^2 \sin \varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_0^{\pi} d\theta = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

مسئله (۱) درستی قضیه استروکس را برای میدان برداری

$$\vec{F} = \langle x(z-y), y(x-z), z(y-x) \rangle$$

در خم شش‌ضلعی C که به صورت $x+y+z=1$ با صفحات مختصات مشخص می‌شود، بررسی کنید.



حل: مرور اولی

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

ابتدا انتگرال خط را حساب می‌کنیم

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

$$C_1: \vec{r}_1(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,1,0) = \langle 1-t, t, 0 \rangle \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

$$d\vec{r}_1 = \langle -1, 1, 0 \rangle \rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = -x(z-y) + y(x-z)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = 2xy - yz - xz = 2t(1-t)$$

$$\int_{C_1} = \int_0^1 2t(1-t) dt = t^2 - \frac{2}{3}t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$C_2: \vec{r}_2(t) = (1-t)(0,1,0) + t(0,0,1) = \langle 0, 1-t, t \rangle \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

$$d\vec{r}_2 = \langle 0, -1, 1 \rangle \rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = -y(x-z) + z(y-x)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = 2yz - xz - xy = 2t(1-t) \quad ;$$

$$\int_{C_2} = \int_0^1 2t(1-t) dt = \frac{1}{3}$$

$$C_3; \vec{r}_3(t) = (0, 0, 1)(1-t) + t(1, 0, 0) = \langle t, 0, 1-t \rangle \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{dr}_3 = \langle 1, 0, -1 \rangle \rightsquigarrow \vec{F} \cdot \vec{dr}_3 = x(z-y) - z(y-x) = 2xz - xy - zy$$

$$= 2t(1-t) \quad ; \quad \int_{C_3} = \int_0^1 2t(1-t) dt = \frac{1}{3}$$

$$\oint_C = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

حال طرف بت راست یعنی انتگرال صحیح، انجاسه بی کنیم

$$\text{Curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x) \end{vmatrix} = \langle z+y, x+z, y+x \rangle$$

$$\sigma: x+y+z=1 \quad ; \quad z=1-x-y \quad ; \quad G:=x+y+z-1=0$$

$$\vec{\nabla} G = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad ; \quad \|\vec{\nabla} G\| = \sqrt{3} \quad ; \quad d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

$$\iint_{\sigma} \text{curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 2(x+y+z) dx dy = 2 \iint_D dx dy$$

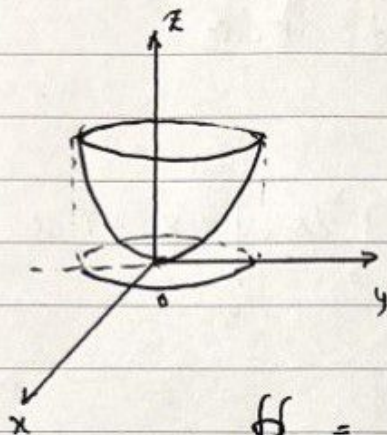
$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases} \quad = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx = 2 \int_0^1 (1-x) dx = 2 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$2 \iint_D dx dy = 2A(D) = 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\vec{F} = \langle x, y, 3 \rangle$$

مسال (2): دوتی قضیہ درستی این را برای میدان برداری

در دایره $\mathcal{C}$ در سطح $\mathcal{S}$: $\mathcal{S} = x^2 + y^2$, $\mathcal{C} = 4$ کثیف کنید



$$\oint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV$$

استدلال انتگرال سطح را محاسبه می کنیم

$$\oint_{\sigma} = \iint_{\sigma_1} + \iint_{\sigma_2}$$

$$\sigma_1: \mathcal{C} = x^2 + y^2; \quad d\sigma = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

$$D: x^2 + y^2 \leq 4; \quad G_1: x^2 + y^2 - \mathcal{C} = 0; \quad \nabla G_1 = \langle 2x, 2y, -1 \rangle$$

$$\|\nabla G_1\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_{\sigma_1} = \iint_D \langle x, y, 3 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \langle 2x, 2y, -1 \rangle \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2 - 3)r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{3}{2}r^2 \right]_0^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$$

$$\sigma_2: \mathcal{C} = 4; \quad \vec{n}_2 = \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle; \quad d\sigma = dx \, dy$$

$$D: x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\iint_{\sigma_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \langle x, y, 3 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle r \, dr \, d\theta = 3A(D) = 3(2 \times 2 \times \pi) = 12\pi$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1 + 1 = 2$$

حال نتایج را محاسبه می کنیم

subject: (4) 3

date: _____

$$\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}; \iiint_{\Omega} = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4 - r^2) \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (8 - 4) \, d\theta$$

$$= 2 \times 4 \times 2\pi = 16\pi$$