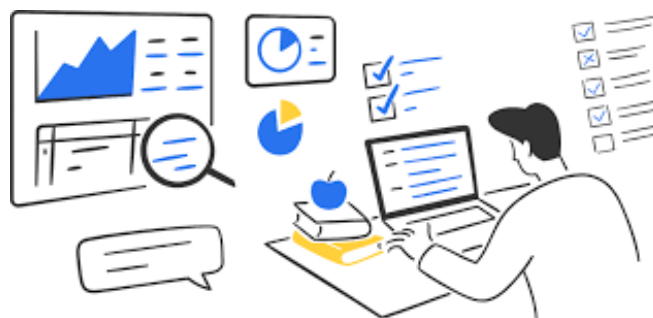




ریاضی عمومی ۲

انتگرال دوگانه

تعداد تمرین : ۱۱

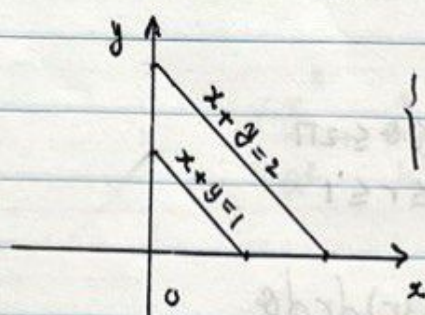
دانشگاه علم و صنعت

مؤلف: جناب آقای دکتر احمد رضا فروغ

(11) ص

1- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ که در آن v در زیر تصویر

بارش $(1,0)$ ، $(2,0)$ ، $(0,1)$ و $(0,2)$ در ربع اول x, y



$$\begin{cases} x+y=v \\ x-y=u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

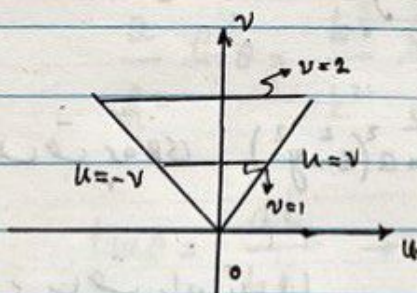
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$$

$$1 \leq x+y \leq 2 \leftrightarrow 1 \leq v \leq 2$$

$$\begin{cases} x=0 & ; 1 \leq y \leq 2 \\ y=0 & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$x=0 \rightarrow u=-v \text{ و } y=0 \rightarrow u=v$$



$$D': \begin{cases} 1 \leq v \leq 2 \\ -v \leq u \leq v \end{cases}$$

$$\iint_D = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{-v}^v dv$$

$$= \frac{1}{2} [2 \sin(1)] \left(\frac{v^2}{2}\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \sin(1)$$

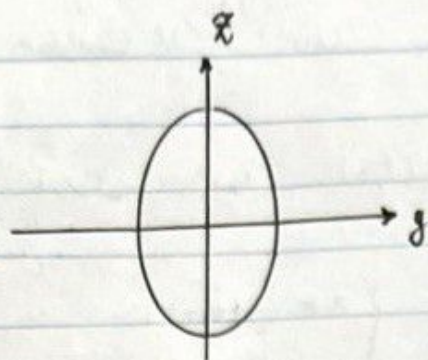
2- ششدر مانند نیت به محور x یک نیمه دایره در تصویر معنی به معادله $9y^2 + x^2 = 9$

۱، فرض نیت بین δ (۱) باشد

$$I_x = \iint_D (y^2 + z^2) dy dz$$

$$D: y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1$$

حل

(2) *pp*

$$y = r \cos \theta ; x = r \sin \theta$$

$$\frac{\partial(y, x)}{\partial(r, \theta)} = 3r$$

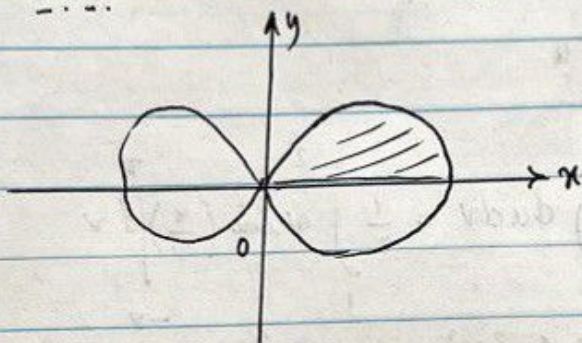
$$D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta] (3r) dr d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{2} (1 + \cos 2\theta) dr d\theta + 27 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{2} (1 - \cos 2\theta) dr d\theta$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta + \frac{27}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{15}{2} \pi$$

3) مساحت پاره‌های $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ، $(a > 0)$ را بیابید.



حل: مساحت را در ربع اول
حساب کرده در 4 ضرب
می‌کنیم

$$r^4 \leq a^2 r \cos 2\theta$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\theta} \end{cases}$$

$$A(D) = 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta$$

$$= a^2 \left[\sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} = a^2$$

(3) ص

4- ار $a, b, h, k > 0$ ، علقت و سابق و بعد

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$$

ص $y = br \sin \theta$ ، $x = ar \cos \theta$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = abr$$

$$r^2 = \frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta ; 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}$$

ح θ و r لدا ، $r > 0$ پس

$$\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta = \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta \rightarrow \tan^2 \theta = \frac{a^2 k^2}{b^2 h^2}$$

$$\tan \theta = \frac{ak}{bh} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{ak}{bh}\right)$$

$$0 \leq \theta \leq \tan^{-1}\left(\frac{ak}{bh}\right)$$

$$A(D) = 4 \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{ak}{bh}\right)} \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}} r dr d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{ak}{bh}\right)} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{ak}{bh}\right)} \left\{ \frac{a^2}{h^2} [(1 + \cos 2\theta)] - \frac{b^2}{k^2} [1 - \cos 2\theta] \right\} d\theta$$

(4) م

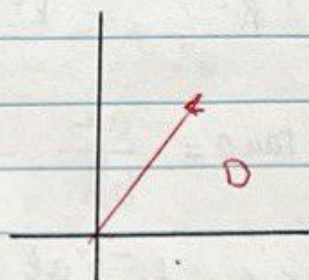
$$A(D) = \left[\frac{a^2}{h^2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) - \frac{b^2}{k^2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\tan^{-1} \left(\frac{ak}{bh} \right)}$$
$$= \left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{ak}{bh} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \sin \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{ak}{bh} \right) \right)$$

5 - مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = I \cdot I = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \times \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$



$$D: \begin{cases} 0 \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(5)

6- تعداد انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)} dx dy$$

$$D: x^2+xy+y^2 \leq 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

حل:

$$x = u \cos \varphi - v \sin \varphi ; y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = (u \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 + (u \cos \varphi - v \sin \varphi)(u \sin \varphi + v \cos \varphi)$$

$$+ (u \sin \varphi + v \cos \varphi)^2 = u^2 \cos^2 \varphi + v^2 \sin^2 \varphi - 2uv \sin \varphi \cos \varphi$$

$$+ u^2 \sin \varphi \cos \varphi + uv \cos^2 \varphi - uv \sin^2 \varphi - v^2 \sin \varphi \cos \varphi + u^2 \sin^2 \varphi + v^2 \cos^2 \varphi$$

$$+ 2uv \cos \varphi \sin \varphi \stackrel{\varphi = \frac{\pi}{4}}{=} \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2$$

$$= \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \leq 1$$

$\varphi := \frac{\pi}{4}$ زیرا xy حداکثر می‌گیرد

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{2}{3}} r \cos \theta \\ v = \sqrt{2} r \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \frac{2}{\sqrt{3}} r$$

(6) هر

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2} \right]_0^1 d\theta = \frac{(1 - e^{-1})}{\sqrt{3}} (2\pi)$$

7- انتگرال زیر را حل کنید

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx$$

پس برای آن دو تغییر زبانی ارائه دهید.

حل: از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$\begin{cases} x+y=u \\ y=uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u(1-v) \\ y=uv \end{cases} ; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$$

$$u = x+y ; v = \frac{y}{x+y}$$

$$x=0 \rightarrow u=y \rightarrow u(1-v)=0 \begin{cases} \nearrow u=0 \\ \searrow v=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y=0 &\rightarrow u=0, v=0 \\ y=1-x &\rightarrow x+y=u=1 \end{aligned}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

ص (7)

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e^{uv/u} u \, dv \, du = \left(\int_0^1 e^v \, dv \right) \times \left(\int_0^1 u \, du \right)$$

تغییر فرمی: محاسبه حجم ناحیه زیر تابع $f(x,y)$ در حجم کل D با $z = \frac{y}{x+y}$
محاسبه انتگرال زیر

$$I = \iint_D (x+y) \, dx \, dy$$

که نشان D ناحیه محدود بر روی خط $y=2x$ و $y=x$

$xy=2$ و $xy=9$ در ربع اول. برای آن تغییر فرمی ارائه دهید.

حل: از تغییر متغیر

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ xy = v \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 2 \leq v \leq 9 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x} = -2u$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy} = u \rightarrow y^2 = uv \rightarrow y = \sqrt{uv}$$

در ربع اول

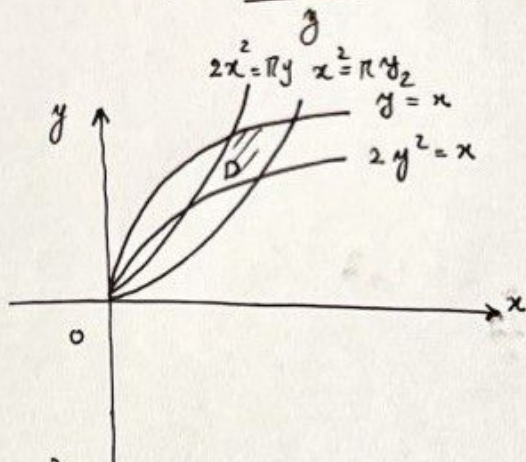
$$x = \frac{v}{y} \rightarrow x = \frac{v}{\sqrt{uv}} = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$$I = \int_1^2 \int_2^9 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \right) \frac{1}{2u} \, dv \, du = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_2^9 \left(\frac{1}{\sqrt{uv}} + \sqrt{\frac{u}{v}} \right) \, dv \, du$$

مطریقت می بیند که در مانر لایه ای که در این شکل در

$$D: 2x^2 = \pi y; x^2 = \pi y; 2y^2 = x; y^2 = x$$

پول که در حاکم به جغای هر لحظه D برابر است: $\delta(x,y) = \frac{\sin(\pi y)}{y}$



$$I_x = \iint_D x^2 \frac{\sin(\pi y)}{y} dx dy$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} = u & \rightarrow \pi/2 \leq u \leq \pi \\ \frac{y^2}{x} = v & \rightarrow 1/2 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow I_x = \frac{1}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{1/2}^1 u \sin(uv) dv du$$

$$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x} = xy = uv$$

$$I_x = \frac{1}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} \left[-\cos(uv) \right]_{1/2}^1 du = \frac{1}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} [\cos(u/2) - \cos(u)] du$$

$$= \frac{1}{5} \left[2 \sin(u/2) - \sin(u) \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{5} \left[(2 \sin(\pi/2) - \sin(\pi)) - (2 \sin(\pi/4) - \sin(\pi/2)) \right]$$

$$\left(-\sin(\pi/2) \right) = \frac{1}{5} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right) = \frac{1}{5} \left(3 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

مسئله (4): مطلوبست حاصل

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$$
 که D ناحیه محدود به منحنی های

$$x^2 + y^2 = ax \quad ; \quad x^2 + y^2 = bx \quad ; \quad x^2 + y^2 = ay \quad ; \quad x^2 + y^2 = by \quad ; \quad 0 \leq a \leq b$$

حل: ابتدا D را در دستگاه قطبی می نویسیم،

$$D_{r\theta} : a \cos \theta \leq r \leq b \cos \theta \quad ; \quad a \sin \theta \leq r \leq b \sin \theta$$

و انبوهال فوق بصورت

$$\iint_{D_{r\theta}} \frac{r dr d\theta}{r^4}$$

حال قرار می دهیم

$$\frac{r}{\cos \theta} = u \quad ; \quad \frac{r}{\sin \theta} = v \quad ; \quad a \leq u \leq b \quad ; \quad a \leq v \leq b$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos \theta} & \frac{r \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} & \frac{-r \cos \theta}{\sin^2 \theta} \end{vmatrix} = \frac{-r}{\sin^2 \theta} - \frac{r}{\cos^2 \theta} = -\frac{r}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = -\frac{1}{r^3} u^2 v^2$$

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(u,v)} = r^3 \cdot \frac{1}{(uv)^2}$$

$$\iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2} = \iint_{D_{r\theta}} \frac{dr d\theta}{r^3} = \iint_{D_{uv}} \frac{du dv}{u^2 v^2}$$

$$= \left(\int_a^b \frac{du}{u^2} \right) \left(\int_a^b \frac{dv}{v^2} \right) = \left[-\frac{1}{u} \right]_a^b \times \left[-\frac{1}{v} \right]_a^b = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2$$

سؤال (5) به کمک روش انتگرال زیر را حساب کنید

$$I = \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2 - y^2}} \frac{\sqrt{(\ln 2)^2 - y^2}}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}} dx dy$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{(\ln 2)^2 - y^2} \\ 0 \leq y \leq \ln 2 \end{cases}$$

حل 1

مناطق D در مختصات قطبی ربع دایره $x^2 + y^2 = (\ln 2)^2$ است.

$$D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq r \leq \ln 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \int_0^{\pi/2} \frac{r}{e^r} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\ln 2} r e^{-r} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(r-1)e^{-r} \right]_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2} (2\ln 2 - 1)$$

D	I
+	r
-	1