



۱- با تعویض ترتیب انتگرال گیری، انتگرال دوگانه زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(\frac{y^3 + y^2}{2}\right) dy dx$$

۲- حجم ناحیه محصور بین سهمی گون  $z = x^2 + y^2$  و مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  را حساب کنید.

۳- به کمک قضیه گرین، کار انجام شده توسط میدان برداری

$$\vec{F}(x, y) = \left\langle 2y + \sqrt{9 + x^3}, 5x + e^{\tan^{-1} y} \right\rangle$$

را روی مسیر  $C$  بیابید که در آن  $C$  یک مثلث قائم الزاویه با رئوس های  $(0, 0)$  و  $(2, 0)$  و  $(2, 2)$  است که در جهت پاد ساعتگرد پیموده شده است.

۴- به کمک قضیه دیورژانس، انتگرال سطح  $\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$  را حساب کنید که در آن:

$$\vec{F}(x, y, z) = \langle 1, y, z^2 \rangle, \quad \sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

۵- قضیه استوکس را برای میدان برداری  $\vec{F}(x, y, z) = \langle 2y, -z, 3 \rangle$  و سطح  $\sigma$  بررسی

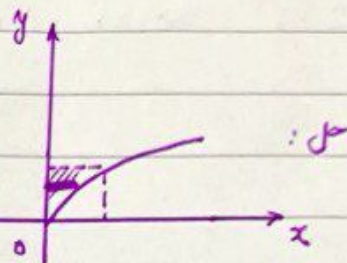
کنید که در آن سطح  $\sigma$  قسمتی از سهمی گون  $z = 4 - x^2 - y^2$  است که توسط استوانه  $z = x^2 + y^2$  برش خورده است.

۱- با تعریف ترتیب انتگرال گیری، انتگرال دوگانه زیر را حساب کنید.

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dy dx$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dx dy = \int_0^1 y^2 \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dy$$

$$= -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{y^3+1}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left(\cos\frac{1}{2} - \cos 1\right)$$

۲- حجم ناحیه محدود بین این دو مخروط  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  و  $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$  را بدین روش حساب کنید.

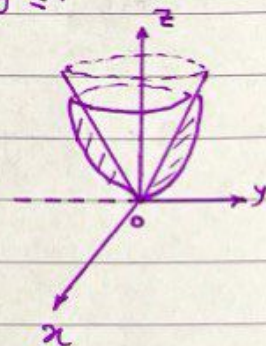
$$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$z = x^2+y^2 = r^2$$

$$\rightarrow r(r-1)=0 \quad \begin{cases} r=0 \\ r=1 \end{cases}$$

$$D: x^2+y^2 \leq 1$$

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad V(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^r r dz dr d\theta$$



$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r-r^2) r dr d\theta = 2\pi \times \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

نکته: ناحیه مورد نظر بین دو مخروط درون یک کره است.



3- به کمک قضیه گرین، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\vec{F}(x,y) = \langle 2y + \sqrt{9+x^3}, 5x + e^{\tan^{-1}y} \rangle$$

دارای مسیر C به گونه‌ای که دایره قائم الزامی بر این‌ها (0,0) و (2,0) داشته باشد.

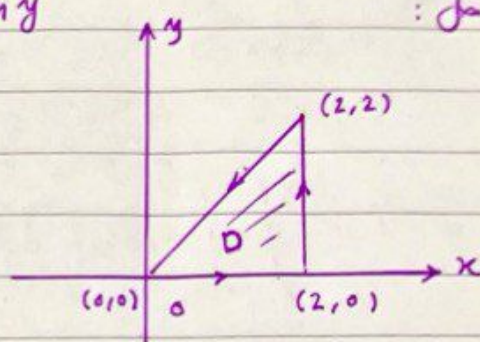
و (2,2) است که در جهت پاد ساعتگرد پیاده شده است.

$$P(x,y) = 2y + \sqrt{9+x^3} \quad ; \quad Q = 5x + e^{\tan^{-1}y}$$

$$Q_x - P_y = 5 - 2 = 3$$

$$\oint_C = 3 \times A(D) = 3 \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 6$$

مساحت مثلث قائم الزامی بر این‌ها



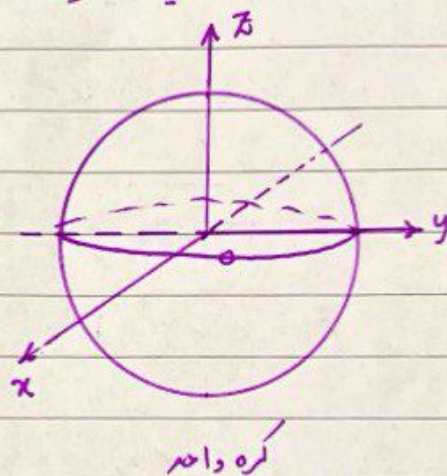
4- به کمک قضیه دیورانس، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\vec{F}(x,y,z) = \langle 1, y, z^2 \rangle$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\text{div}(\vec{F}) = 1 + 2z$$

$$\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\oint_{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 + 2\rho \cos\varphi) \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{2} \cos\varphi \right]_0^1 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{3} \sin\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) d\varphi \, d\theta$$



$$= 2\pi \times \left[ -\frac{1}{3} \ln 4 - \frac{1}{8} \ln 24 \right]^\pi = 2\pi \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) \right] = +\frac{4}{3}\pi$$

5- درستی قضیه استوکس، برای میدان برداری  $\vec{F}(x,y,z) = \langle 2y, -z, 3 \rangle$

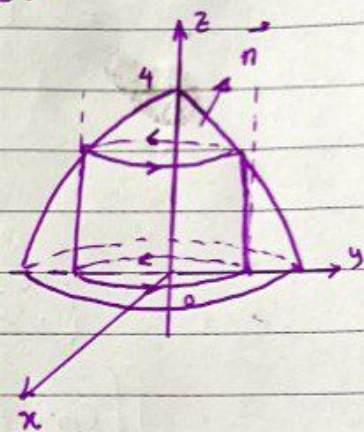
مساحت  $\sigma$  روی کپشه در آن  $\sigma$  مستوی از کپشه  $z = 4 - x^2 - y^2$  است

ایستاده  $x^2 + y^2 = 1$  برش حلقه

حل:  $\text{Curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y & -z & 3 \end{vmatrix} = \langle 1, 0, -2 \rangle$

$$G := z + x^2 + y^2 - 4 = 0; \quad \vec{\nabla} G = \langle 2x, 2y, 1 \rangle$$

$$\|\vec{\nabla} G\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}; \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \langle 2x, 2y, 1 \rangle$$



$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

$$\text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \langle 1, 0, -2 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \langle 2x, 2y, 1 \rangle \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

$$= (2x - 2) dx dy; \quad D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \oint = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \cos \theta - 2) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2}{3} r^3 \cos \theta - r^2 \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} \cos \theta - 1 \right) d\theta = \left( \frac{2}{3} \sin \theta - \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi$$



باسم انتگرال خط ;  $C: x^2 + y^2 = 1$  ;  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 3 \rangle$  ;  $t \in [0, 2\pi]$

$$d\vec{r} = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle dt$$

$$\oint_C = \int_0^{2\pi} \langle 2\sin t, -3, 3 \rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t - 3\cos t) dt = - \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t + 3\cos t) dt$$

$$= - \left[ t + \frac{1}{2}\sin 2t + 3\sin t \right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

روش دیگر برای محاسبه انتگرال سطح :

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \quad \text{آر} \quad \text{(که یک سطح بسته در است)}$$

$$\iint_{\sigma_1} \text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 d\sigma_1 = - \iint_{\sigma_2} \text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_2 d\sigma_2 \quad (*)$$

$$\sigma_2: z=3 \rightarrow \vec{n}_2 = \langle 0, 0, -1 \rangle ; d\sigma_2 = dx dy$$

$$-\text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_2 d\sigma_2 = -\langle 1, 0, -2 \rangle \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle dx dy = -2 dx dy$$

$$\iint_{\sigma_1} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = -2 \times A(D) = -2\pi$$

نکته: رابطه (\*) بدیهی است، زیرا  $\text{div}(\text{Curl}(\vec{F})) = 0$  برقرار است.