



رشته های مهندسی، فیزیک، شیمی و علوم کامپیوتر

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲

مدت زمان پاسخ گویی: ۱۲۰ دقیقه

تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۳/۲۲

توجه: درک سوال جزء امتحان می باشد، لطفا سوال نفرمایید.

در برگه سوال، نام خانوادگی خود را مرقوم نموده و آنرا همراه با پاسخنامه تحویل دهید.

۱. (۲.۵ نمره)

الف) مطلوب است محاسبه $\iint_D xy dA$ هرگاه D ناحیه محدود به یک چهار ضلعی با رئوس $(0, 0), (1, -1), (2, 1), (3, 0)$ باشد.

ب) دو تعبیر فیزیکی برای کمیت خواسته شده ارائه دهید.

۲. (۲ نمره)

حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ و از پایین به سهمی $az = x^2 + y^2$ که $a > 0$ محدود است.

۳. (۲.۵ نمره)

الف) میدان پایستار را تعریف کنید.

ب) مطلوب است محاسبه کار انجام شده توسط نیروی

$$F(x, y, z) = ze^{xz} \ln(y) \vec{i} + \frac{e^{xz}}{y} \vec{j} + (xe^{xz} \ln(y) + (z+1)e^z) \vec{k}$$

در جابه جایی جسمی در مسیر منحنی $r(t) = (\arctan(t-1), e^{t^2}, t+1)$ از زمان $t=0$ تا $t=1$.

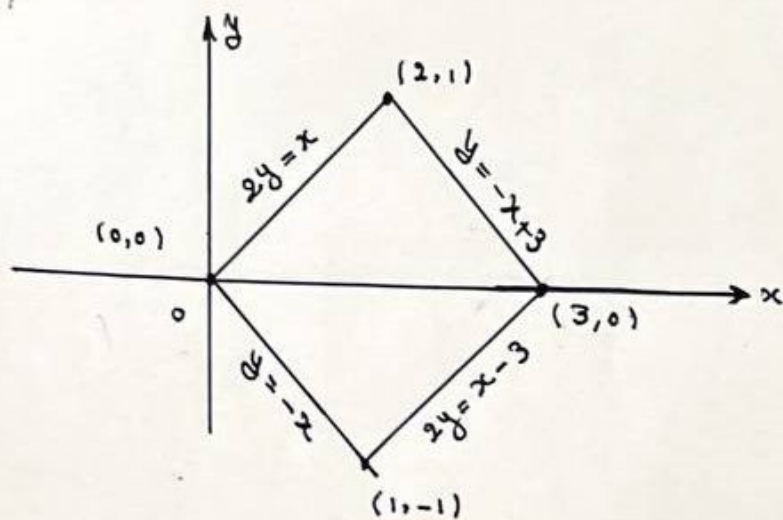
۴. (۲ نمره)

فرض کنید Ω حجم درون رویه بسته، حاصل از تلاقی رویه های $x^2 + y^2 = 1$ و $z = 0$ و $z = 1+x$ باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس، حجم Ω را بیابید. (در قضیه دیورژانس میدان برداری را به صورت $F(x, y, z) = z \vec{k}$ قرار دهید.)

۵. (۳ نمره)

درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $F(x, y, z) = (y^2, x^2, xyz)$ و رویه S که بخشی از سهمی $z = x^2 + y^2$ است که درون استوانه $x^2 + y^2 = 4$ با جهت رو به بالا قرار دارد، تحقیق کنید.

موفق باشید.



$$\begin{cases} C_1: 2y-x=0 \\ C_3: x+y=0 \end{cases} ; \begin{cases} C_2: 2y-x=-3 \\ C_4: x+y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y-x=u \\ x+y=v \end{cases}$$

$$-3 \leq u \leq 0 ; 0 \leq v \leq 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}(u+v) \\ x = -\frac{1}{3}(u-2v) \end{cases} ; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$xy = \frac{1}{9}(u+v)(u-2v) = \frac{1}{9}(u+v)(2v-u)$$

$$= \frac{1}{9}(2v^2 + uv - u^2)$$

$$\iint_D = \frac{1}{27} \int_{-3}^3 \int_0^3 (2v^2 + uv - u^2) du dv = \frac{1}{27} \int_{-3}^3 \left[2uv^2 + \frac{u^2 v}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_{-3}^3 dv$$

$$= \frac{1}{27} \int_{-3}^3 (-6v^2 + \frac{9}{2}v + 9) dv$$

$$= \frac{1}{27} \int_0^3 \left[6v^2 - \frac{9v}{2} - 9 \right] dv = \frac{1}{27} \left[2v^3 - \frac{9v^2}{4} - 9v \right]_0^3$$

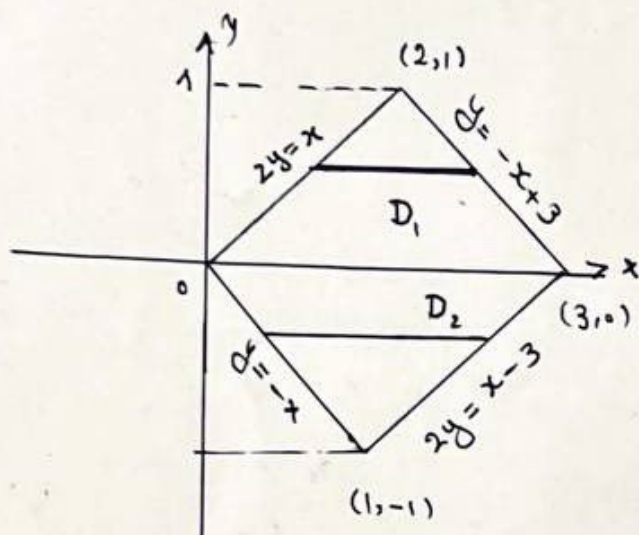
$$= \frac{1}{27} \left(54 - \frac{81}{4} - 27 \right) = \frac{1}{27} \left(\frac{27}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

تعبیر (1) حجم ستونی لایه‌ای با جغلی $\delta = xy$ ، M

تعبیر (2) گنار قرینه اول ستونی لایه‌ای نسبت به صحنه xz ، جغلی $\delta = x$ ، M_{xz}

(7) ص ۵۴

برای تقسیم برای حل سؤال (۱)



$$D_1: \begin{cases} 2y \leq x \leq 3-y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} -y \leq x \leq 2y+3 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy + \iint_{D_2} xy \, dx \, dy$$

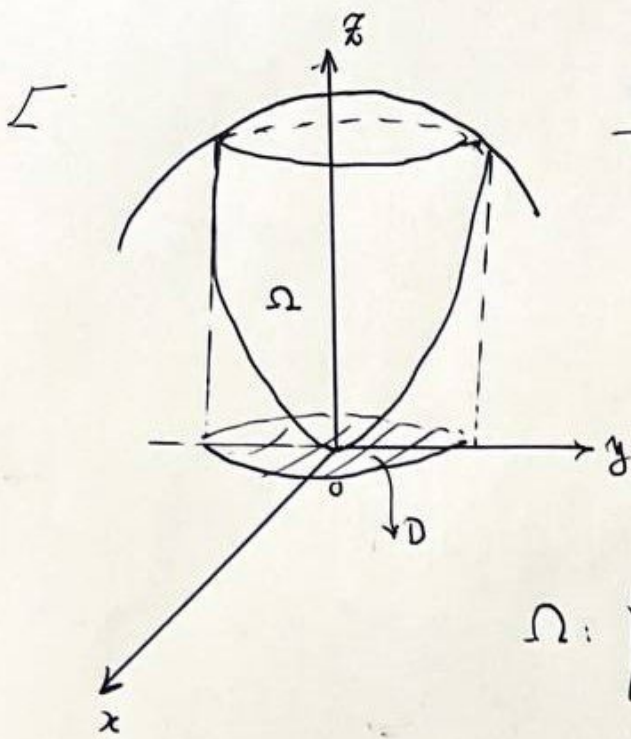
$$\iint_{D_1} = \int_0^1 \int_{2y}^{3-y} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[x^2 y / 2 \right]_{2y}^{3-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (9y - 3y^3 - 6y^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[9y^2/2 - 3/4 y^4 - 2y^3 \right]_0^1 = \frac{7}{8}$$

$$\iint_{D_2} = \int_{-1}^0 \int_{-y}^{2y+3} xy \, dx \, dy = \int_{-1}^0 \left[x^2 y / 2 \right]_{-y}^{2y+3} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (3y^3 + 16y^2 + 9y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} y^4 + 4y^3 + \frac{9}{2} y^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{5}{8}$$

$$\iint_D = \frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$



$z=a$

$$\begin{cases} z = \sqrt{2a^2 - (x^2 + y^2)} \\ z = \frac{1}{a} (x^2 + y^2) \end{cases} \rightarrow D: x^2 + y^2 \leq a^2$$

دریافت - برآورد

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{1}{a} r^2 \leq z \leq \sqrt{2a^2 - r^2} \end{cases}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\frac{1}{a}r^2}^{\sqrt{2a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \left[\sqrt{2a^2 - r^2} - \frac{1}{a} r^2 \right] dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (2a^2 - r^2)^{3/2} - \frac{1}{4a} r^4 \right]_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] a^3 d\theta$$

$$= \left(\frac{8\sqrt{2} - 7}{12} a^3 \right) (2\pi) = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6} \pi a^3$$

پایه سوال (3) میدان $\vec{F} = \langle p, Q, H \rangle$ ، ابرای $R \subseteq \mathbb{R}^3$ پاتیه

پایه هگا، یک تابع اسکالر ϕ باشد که $\vec{\nabla} \phi = \vec{F}$ شرط لازم.

کافی برای پاتیه بودن میدان برداری $\vec{F}$ آنست که $\text{Curl}(\vec{F}) = \vec{0}$.

$$p = xz e^{xz} \ln y ; Q = \frac{e^{xz}}{y} ; H = xz e^{xz} \ln y + (z+1)e^z \quad (-)$$

$$p_y = \frac{z}{x} e^{xz} = Q_x$$

$$p_z = e^{xz} \ln y + xz e^{xz} \ln y = H_x ; y \neq 0$$

$$Q_z = \frac{x e^{xz}}{y} = H_y$$

پاتیه بودن میدان برداری $\vec{F}$ در فضای سه بعدی x, y, z .

$$r(0) = (-\pi/4, 1, 1) ; r(1) = (0, e, 2)$$

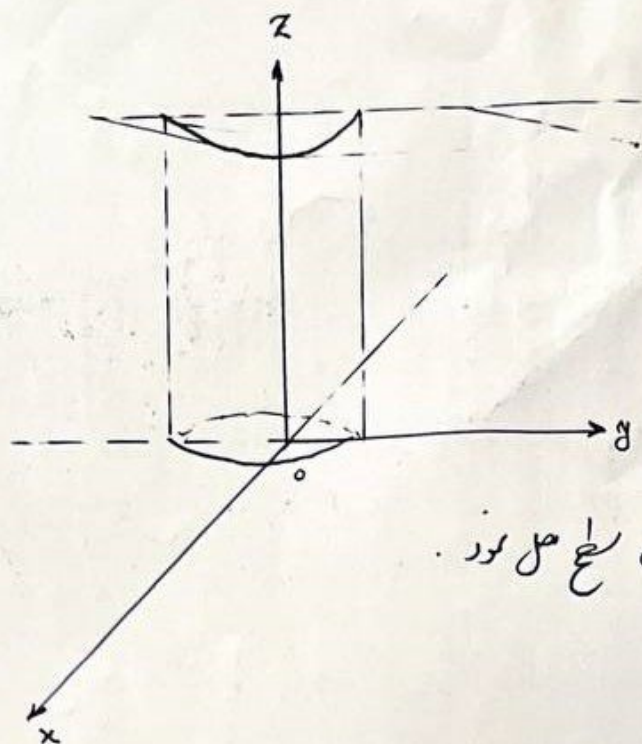
گیرند از این دو نقطه زانی می تواند همه xz را قطع کند به مقدار y

(بوله دوم) فلف عدم باشند. پس در سرتنگر میدان برداری پاتیه بوده

$$\phi = e^{xz} \ln y + z e^z$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(1) - \phi(0) = e - (1 + ze^2)$$

مسئله 4



پایه سوال چهار

توجه: چون در این مسئله $\vec{F}$ را

را داده، لذا به کمک انتگرال سه گانه

نباید کرد و مساله را باید به کمک انتگرال سطح حل نمود.

$$\sigma_1: z = 1+x \rightarrow G_1 := z - (1+x) = 0; \nabla G_1 = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

$$\sigma_2: z = 0 \rightarrow G_2 := -z = 0 \rightarrow \nabla G_2 = \langle 0, 0, -1 \rangle = -\vec{k}$$

$$\sigma_3: y = -\sqrt{1-x^2} \rightarrow G_3 := -\sqrt{1-x^2} - y = 0 \rightarrow \nabla G_3 = \left\langle \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1, 0 \right\rangle$$

$$\sigma_4: y = \sqrt{1-x^2} \rightarrow G_4 := y - \sqrt{1-x^2} = 0 \rightarrow \nabla G_4 = \left\langle \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 1, 0 \right\rangle$$

$$\|\nabla G_1\| = \sqrt{2}; d\sigma_1 = \sqrt{2} dx dy; D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\|\nabla G_2\| = 1; d\sigma_2 = dx dy$$

$$\|\nabla G_3\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \|\nabla G_4\|$$

$$d\sigma_3 = d\sigma_4 = \frac{dx dz}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D_{xz}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1+x \end{cases}$$

$$\oint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \sum_{i=1}^4 \iint_{\sigma_i} \vec{F} \cdot \vec{n}_i d\sigma_i$$

5

ادامہ پانچ سوال چار

$$\iint_{\sigma_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle 0, 0, \underbrace{1+x}_z \rangle \cdot \langle -1, 0, 1 \rangle r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \underbrace{r \cos \theta}_x) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \theta \right) d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{3} \sin \theta \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\iint_{\sigma_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle 0, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle r dr d\theta = 0$$

$$\iint_{\sigma_3} = \int_{-1}^1 \int_0^{1+x} \langle 0, 0, z \rangle \cdot \left\langle \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1, 0 \right\rangle dz dx = 0$$

$$\iint_{\sigma_4} = \int_{-1}^1 \int_0^{1+x} \langle 0, 0, z \rangle \cdot \left\langle \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1, 0 \right\rangle dz dx = 0$$

یہ، حجم بہت آسان ہے لہذا قضیہ (دوسری) سے آسانی سے

$$V(\Omega) = \oint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} dv$$

$$V(\Omega) = \pi$$

(6) حل

پانچ سوال (5)

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, 4 \rangle$$

$$\vec{dr} = \langle -2 \sin t, 2 \cos t, 0 \rangle \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

انتگرال خط

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = \langle 4 \sin^2 t, 4 \cos^2 t, 16 \sin t \cos t \rangle \cdot \langle -2 \sin t, 2 \cos t, 0 \rangle$$

$$= -8(1 - \cos^2 t) \sin t + 8(1 - \sin^2 t) \cos t$$

$$\oint_C = \int_0^{2\pi} [8(1 - \sin^2 t) \cos t - 8(1 - \cos^2 t) \sin t] dt$$

$$= \left(8 \cos t + 8 \sin t - \frac{8}{3} \cos^3 t - \frac{8}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

انتگرال سطح :

$$\text{Curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & x^2 & xyz \end{vmatrix} = \langle xz, -yz, 2(x-y) \rangle$$

$$z=4 \text{ حل} \rightarrow \vec{n} = \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$d\sigma = dx dy = r dr d\theta \quad ; \quad D: x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} = 2(x-y)$$

$$\iint_D \text{Curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2(r \cos \theta - r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \cos \theta - \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^2 d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{16}{3} [\sin \theta + \cos \theta]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

درستی چک کردیم